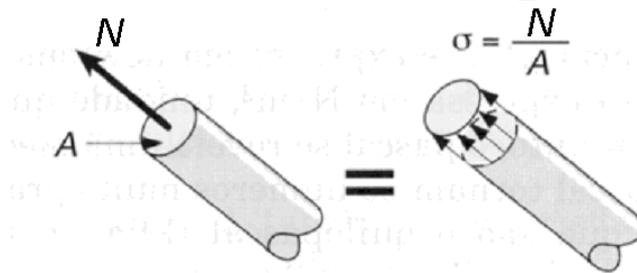


## Tensões associadas a esforços internos

Refs.: Beer & Johnston, *Resistência dos Materiais*, 3ª ed., Makron  
Botelho & Marchetti, *Concreto Armado - Eu te amo*, 3ª ed, Edgard Blücher, 2002.

### Esforços axiais e tensões normais

Já foi visto que esforços normais (axiais) em barras estão associados ao desenvolvimento de tensões normais. O termo *normal* é utilizado pois tanto o esforço axial quanto a tensão a ele associada são perpendiculares (normais) à seção transversal da barra.

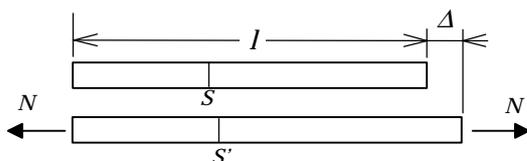


O esforço normal é um esforço integral da seção transversal de uma barra. A tensão normal associada representa a sollicitação em um ponto da seção transversal da barra onde atua o esforço axial. A tensão normal associada é obtida pela divisão  $\sigma = N / A$ , sendo  $N$  o esforço normal na barra e  $A$  a área da seção transversal.

Dessa forma, está sendo considerado que as tensões normais provocadas por esforços normais são constantes ao longo da seção transversal. Esta consideração é consequência de três hipóteses:

- O esforço normal tem uma resultante que passa pelo centro de gravidade da seção transversal. Isso caracteriza o que é chamado de *esforço normal puro*.
- A deformação da barra submetida a esforço normal é tal que as seções transversais da barra permanecem planas e perpendiculares ao eixo da barra.
- Relação linear entre tensão normal e deformação normal:  $\sigma = E\varepsilon$ , sendo  $E$  o módulo de elasticidade do material e  $\varepsilon$  a deformação axial.

As duas primeiras hipóteses impõem que todos os pontos da seção transversal de uma barra submetida a esforço normal puro tenham o mesmo valor de deformação axial:



$$\text{Deformação axial: } \varepsilon = \frac{\Delta}{l}$$

Sendo  $l$  o comprimento inicial da barra e  $\Delta$  a variação de comprimento da barra.

Da terceira hipótese resulta que as tensões normais provocadas pelo esforço normal puro são constantes em todos os pontos da seção transversal.

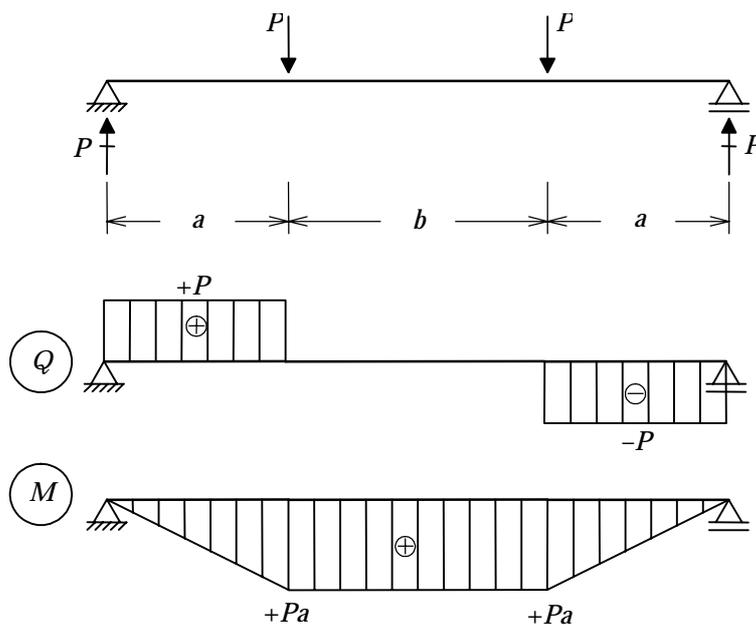
## Flexão pura, simples e composta

A flexão de uma barra pode ser classificada em três tipos:

**Flexão pura:** quando o único esforço interno é o momento fletor. Isto é, na seção de uma barra onde ocorre a flexão pura o esforço cortante e esforço normal são nulos.

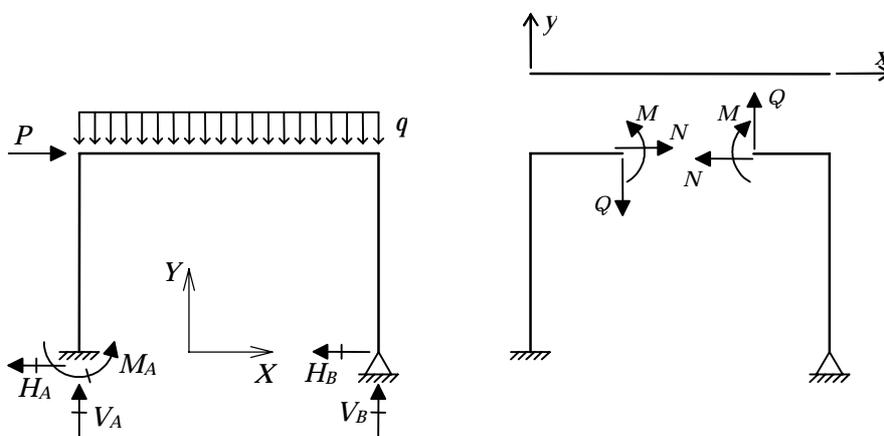
**Flexão simples:** quando o esforço normal é nulo. Isto é, na seção de uma barra onde ocorre a flexão simples existem dois esforços internos: o esforço cortante e o momento fletor.

Na viga mostrada abaixo, no seu trecho central entre as cargas concentradas, o esforço cortante é nulo e a flexão é pura. Nos trechos das extremidades, entre os apoios e as cargas aplicadas, a flexão é simples.



**Flexão composta:** quando a flexão está acompanhada de esforços normais não nulos.

A flexão composta é comum em pórticos. Veja por exemplo a viga do pórtico plano mostrado abaixo. Uma seção transversal genérica da viga apresenta três esforços internos: esforço normal  $N$ , esforço cortante  $Q$  e momento fletor  $M$ . A flexão na viga é composta.

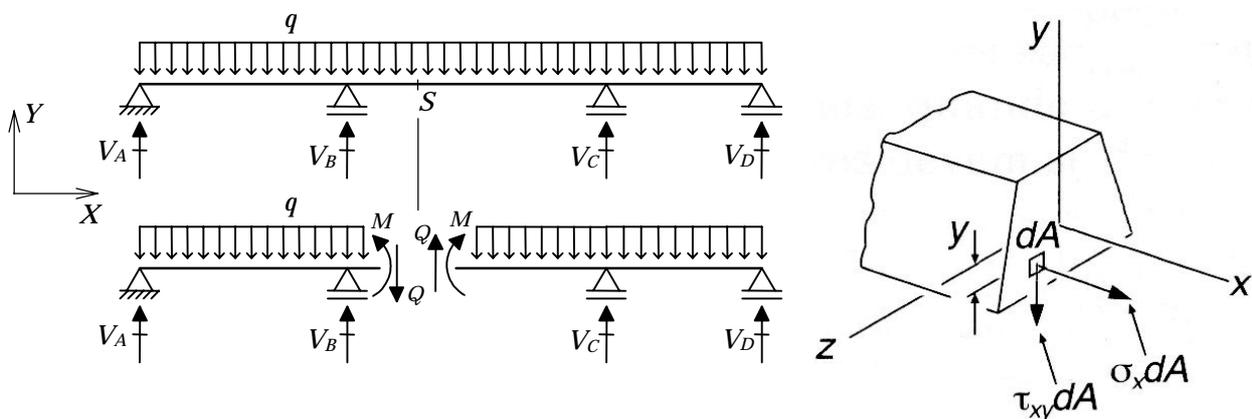


## Tipos de tensões em vigas submetidas a cargas transversais

De uma forma análoga à relação entre o esforço normal e a tensão normal, é preciso definir os tipos de tensões associadas ao esforço cortante e ao momento fletor em vigas. Também é importante determinar como se dá a distribuição de tensões ao longo da seção transversal para cada tipo de esforço interno.

A figura abaixo mostra uma viga só com carregamento vertical (flexão simples) e indica o esforço cortante e o momento fletor em uma seção transversal qualquer. A figura também mostra a seção transversal ampliada com dois tipos de tensões:

- *Tensão normal*:  $\sigma_x$ , que é associada ao esforço normal  $N$  (que no caso é nulo) e ao momento fletor  $M$ .
- *Tensão de cisalhamento*:  $\tau_{xy}$ , que é associada ao esforço cortante  $Q$ .



**Observe que o eixo  $x$  passa pelo centro de gravidade das seções transversais da viga.**

Na figura,  $dA$  é a *área infinitesimal* em um ponto da seção transversal. Esta área é dita infinitesimal pois ela pode ser tão pequena quanto se queira. Na verdade, a área do ponto é nula. Portanto, só faz sentido definir a área de um ponto *no limite* quando  $dA$  tende a zero. Quando uma entidade é definida no limite quando seu valor tende a zero, ela é dita *infinitesimal*.

Em um ponto da seção transversal de uma viga atuam duas forças muito pequenas (*forças infinitesimais*):

Na direção horizontal (eixo  $x$ ):  $\sigma_x dA$

Na direção vertical (eixo  $y$ ):  $\tau_{xy} dA$

## Esforço cortante e tensão de cisalhamento

O esforço cortante em uma seção transversal corresponde ao somatório de todas as forças infinitesimais  $\tau_{xy} dA$  dos pontos da seção. Como a área associada a um ponto é tão pequena quanto se queira, este somatório é definido no limite quando  $dA$  tende a zero:

$$Q = (\tau_{xy} dA)_1 + (\tau_{xy} dA)_2 + \dots + (\tau_{xy} dA)_n = \lim_{dA \rightarrow 0} \sum \tau_{xy} dA$$

O somatório no limite quando  $dA$  tende a zero é chamado de *integral* e é simbolizado da seguinte maneira:

$$Q = \int_A \tau_{xy} dA$$

O cálculo do esforço cortante a partir das tensões de cisalhamento (ou seja, o cálculo da integral acima) depende da distribuição das tensões de cisalhamento ao longo da seção transversal. No caso geral esta distribuição não é uniforme. Entretanto, é comum adotar como simplificação uma *tensão de cisalhamento média*, que é obtida pela divisão do esforço cortante pela área da seção transversal:

$$\tau_{med} = \frac{Q}{A}$$

### Momento fletor e tensão normal

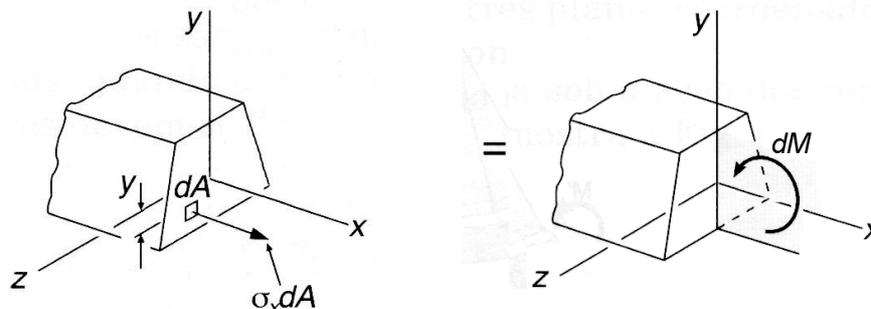
No caso da flexão pura ou simples, se for computado o somatório de todas as forças infinitesimais  $\sigma_x dA$ , o resultado será nulo. Isso porque o esforço normal é nulo. Pode-se dizer que:

$$N = \int_A \sigma_x dA = 0 \quad (\text{flexão simples})$$

De maneira análoga, o momento fletor em uma seção transversal corresponde ao somatório de todos os momentos infinitesimais  $dM$  provocados pelas forças infinitesimais  $\sigma_x dA$ :

$$dM = -y \cdot \sigma_x dA$$

sendo que  $y$  é a distância vertical da força  $\sigma_x dA$  ao centro de gravidade da seção transversal. O sinal negativo aparece porque o produto de uma tensão normal positiva (de tração) por um  $y$  negativo (ponto situado abaixo do plano  $xz$ ) resulta em um momento fletor  $dM$  positivo de acordo com a convenção de sinais adotada.

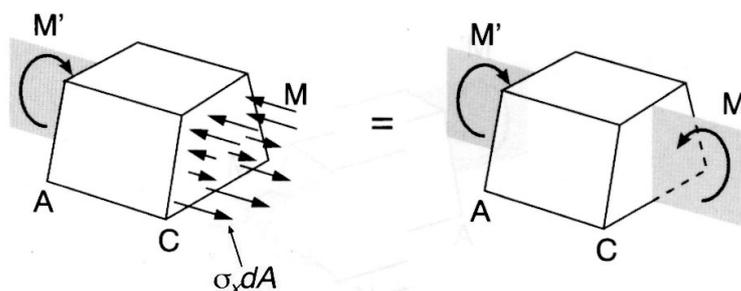


O somatório dos momentos infinitesimais  $dM$ , no limite quando  $dA$  tende a zero, para os pontos da seção transversal resulta em:

$$M = \lim_{dA \rightarrow 0} \sum dM$$

$$M = \lim_{dA \rightarrow 0} \sum (-y) \cdot \sigma_x dA$$

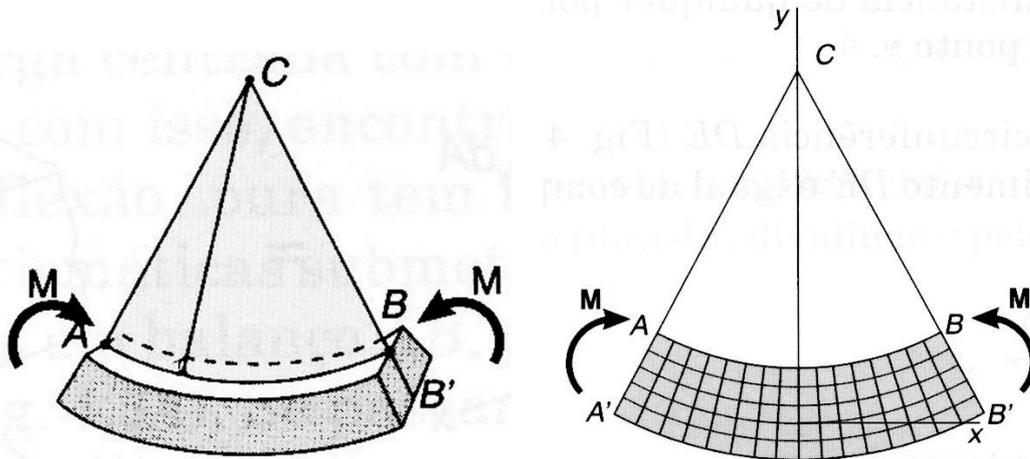
$$M = \int_A (-y) \cdot \sigma_x dA$$



Para avaliar a integral que relaciona tensões normais  $\sigma_x$  com momento fletor  $M$ , é preciso conhecer a distribuição das tensões normais  $\sigma_x$  ao longo da seção transversal. Considerando que existe uma relação linear entre tensões e deformações, a distribuição de tensões normais  $\sigma_x$  está diretamente associada à maneira como se dá a deformação de uma viga submetida à flexão, isto é, submetida a momentos fletores. Isso é tratado na seção seguinte.

### **Deformações associadas à flexão de uma viga**

Considere um trecho de viga submetida à *flexão pura*, isto é submetida somente a um momento fletor positivo  $M$ , tal como indicado na figura abaixo.



O momento fletor é constante para qualquer seção transversal do trecho e a viga se flexiona de uma maneira uniforme. Dessa forma, a linha  $AB$  na face superior da viga tem uma curvatura constante. Em outras palavras, a linha  $AB$ , que inicialmente era reta, se transforma em um arco de círculo com centro  $C$ , do mesmo modo que a linha  $A'B'$ , na face inferior da viga.

As hipóteses básicas da deformação de uma viga submetida à flexão são:

- Qualquer seção transversal plana perpendicular ao eixo da barra permanece plana na flexão.
- A seção transversal plana permanece perpendicular ao eixo da viga (no caso da flexão pura, o plano da seção transversal passa pelo ponto  $C$ ).

Pode-se notar que a linha  $AB$  diminui de comprimento quando a viga flexiona na maneira indicada, isto é, com  $M > 0$ . Pode-se ver também que a linha  $A'B'$  se alonga. Dessa forma, a deformação específica  $\epsilon_x$  é negativa (compressão) na parte superior da viga e positiva (tração) na parte inferior da viga.

Como as tensões e deformações estão diretamente relacionadas, na parte superior da viga as tensões normais  $\sigma_x$  são de compressão e na parte inferior da viga as tensões  $\sigma_x$  são de tração.

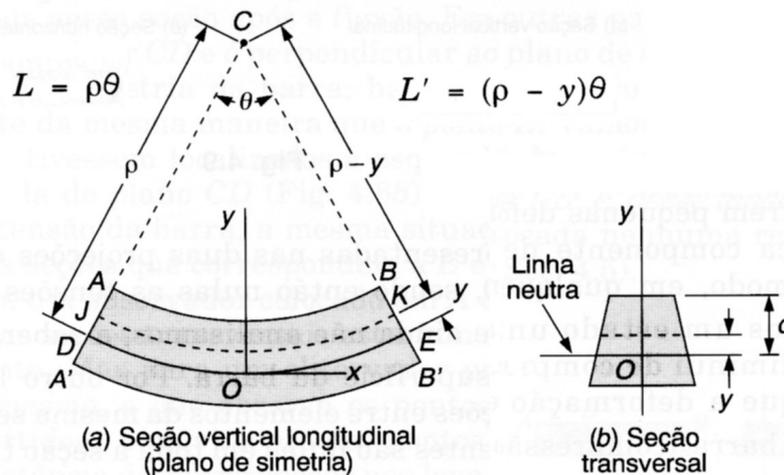
Vê-se também que para momentos fletores positivos ( $M > 0$ ) a concavidade da viga deformada é para cima. Para momentos negativos a concavidade da viga deformada é para baixo.

Dessa forma, *momentos fletores positivos estão associados à tração das fibras inferiores da viga e compressão das fibras superiores da viga. Assim como, momentos fletores negativos estão associados à compressão das fibras inferiores e tração das fibras superiores.*

Deve haver uma superfície paralela à face superior e à face inferior da viga onde  $\epsilon_x$  e  $\sigma_x$  se tornam nulas. Esta superfície é chamada *superfície neutra*. A linha reta que é a interseção da superfície neutra com uma seção transversal é chamada *linha neutra*. Nesta linha, as deformações e tensões normais são nulas. Pode-se mostrar que, *no caso de flexão simples (sem esforço normal), a linha neutra passa pelo centro de gravidade da seção transversal*.

Para avaliar a variação da deformação ao longo de uma seção transversal, considere que o comprimento do trecho de viga é  $L$ . Como o eixo  $x$  da viga passa pelos centros de gravidades das seções transversais, o comprimento do eixo  $x$  flexionado não se altera.

O arco de círculo  $DE$  na figura abaixo representa o eixo  $x$  flexionado. O raio do círculo correspondente a  $DE$  é  $\rho$  e o ângulo central é  $\theta$  (em radianos). Pode-se escrever que  $L = \rho\theta$ .



Considerando agora o arco  $JK$  localizado a uma distância  $y$  acima da superfície neutra, vê-se que seu comprimento é  $L' = (\rho - y)\theta$ .

Como o comprimento original (antes da deformação da viga) do arco  $JK$  era  $L$ , a variação de comprimento da fibra  $JK$  é:

$$\delta = L' - L = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$$

O sinal negativo significa que, para um momento fletor  $M > 0$ , uma fibra com  $y$  positivo vai sofrer encurtamento, o que é pode ser comprovado na figura acima.

A deformação normal específica da fibra  $JK$  é avaliada como a razão entre a variação de comprimento da fibra e o seu comprimento original  $L$ :

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta} \rightarrow \boxed{\epsilon_x = \frac{-y}{\rho}}$$

O sinal negativo indica que a deformação é de compressão para um ponto  $y$  positivo (acima da linha neutra) e que a deformação é de tração para um ponto com  $y$  negativo (abaixo da linha neutra).

O inverso do raio do círculo é definido como a curvatura do eixo da viga:  $\boxed{\text{curvatura} = 1/\rho}$ .

A deformação normal dada na expressão  $\boxed{\varepsilon_x = -y/\rho}$  vale para qualquer ponto situado à distância  $y$  da superfície neutra. Diz-se que, na flexão pura, a deformação normal  $\varepsilon_x$  varia linearmente com a distância  $y$  da superfície neutra, ao longo de toda a barra.

Deve-se observar que, embora a dedução da expressão  $\boxed{\varepsilon_x = -y/\rho}$  tenha sido feito para o caso de flexão pura, ela também é válida para flexão simples. Para tanto, basta imaginar que o trecho com momento fletor constante é tão pequeno quanto se queira, ou que o ângulo  $\theta$  é infinitesimal (na verdade é um  $d\theta$ ).

Neste caso, a expressão  $\boxed{\varepsilon_x = -y/\rho}$  se aplica a uma dada seção transversal. Diz-se que, na flexão simples, a deformação normal  $\varepsilon_x$  varia linearmente com a distância  $y$  da linha neutra, ao longo de toda a seção transversal.

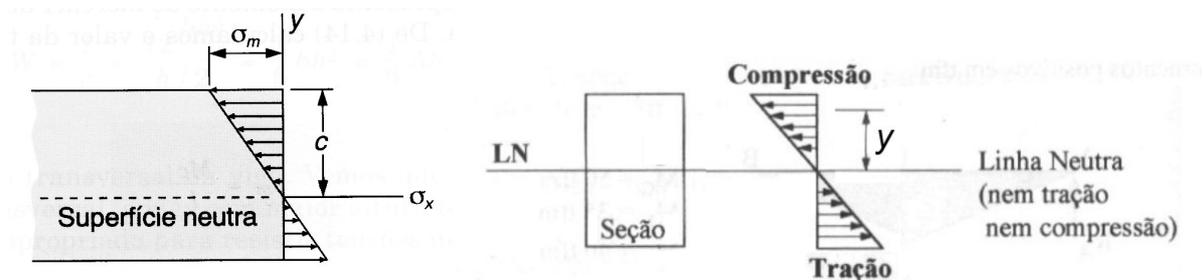
A maior deformação normal  $\varepsilon_x$  em uma seção transversal ocorre, então, para o maior valor de  $y$ . Chamando de  $c$  este valor (que pode corresponder à fibra superior ou à fibra inferior), o máximo valor absoluto de deformação normal é:

$$\boxed{\varepsilon_m = \frac{c}{\rho}}$$

### Tensões associadas à flexão de uma viga

A hipótese básica sobre o comportamento do material que se está sendo adotada é que a relação entre a tensão normal e a deformação normal é linear, isto é,  $\boxed{\sigma_x = E\varepsilon_x}$ , sendo  $E$  o módulo de elasticidade do material.

Portanto, a distribuição de tensões normais  $\sigma_x$  de uma viga submetida à flexão está diretamente associada à distribuição de deformações normais  $\varepsilon_x$ . Isso quer dizer que a tensão normal  $\sigma_x$  varia linearmente com a distância  $y$  da linha neutra, ao longo de toda a seção transversal:



A distribuição linear de tensões é típica para o comportamento de uma viga à flexão cujo material trabalha em regime linear (regime de serviço). A relação linear é dada por:

$$\boxed{\sigma_x = E \frac{-y}{\rho}}$$

Também a maior tensão normal  $\sigma_x$  em uma seção transversal ocorre para o maior valor de  $y$ . Chamando de  $c$  este valor (que pode corresponder à fibra superior ou à fibra inferior), o máximo valor absoluto de tensão normal é:

$$\boxed{\sigma_m = E \frac{c}{\rho}}$$

## **Demonstração de que a linha neutra passa pelo centro de gravidade**

Foi mencionado anteriormente que, no caso da flexão simples (sem esforço normal), a linha neutra (linha com valores nulos de tensões normais  $\sigma_x$ ) passa pelo centro de gravidade da seção transversal. Agora isso vai ser demonstrado. Para tanto, basta considerar a expressão para distribuição das tensões normais e a condição para flexão simples (esforço normal nulo):

$$\sigma_x = E \frac{-y}{\rho} \quad \text{e} \quad N = \int_A \sigma_x dA = 0.$$

Combinando essas duas expressões chega-se a:

$$\int_A \sigma_x dA = \int_A E \frac{-y}{\rho} dA = -\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_A y dA = 0}$$

A equação  $\int_A y dA = 0$  só é satisfeita se a origem do eixo  $y$  estiver no centro de gravidade da seção transversal. Isto quer dizer que, para flexão simples, *a linha neutra passa pelo centro de gravidade da seção*, enquanto as tensões normais permanecerem em regime elástico.

## **Relação entre o momento fletor e a curvatura da viga**

Pode-se obter uma relação entre a curvatura  $\boxed{1/\rho}$  do eixo da viga (que está associada à sua concavidade) e o momento fletor em uma seção transversal.

Considere as seguintes expressões que foram mostradas anteriormente:

Relação entre momento fletor e tensão normal:  $\boxed{M = \int_A (-y) \cdot \sigma_x dA}$

Relação entre tensão normal e curvatura:  $\boxed{\sigma_x = E \frac{-y}{\rho}}$

Se a segunda expressão for introduzida na primeira, resulta em:

$$M = \int_A (-y) \cdot E \cdot \frac{-y}{\rho} dA$$

Nesta integral, os parâmetros  $E$  (módulo de elasticidade) e  $1/\rho$  (curvatura) não variam para uma dada seção transversal. Portanto, estes parâmetros podem entrar multiplicando a integral externamente:

$$M = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA$$

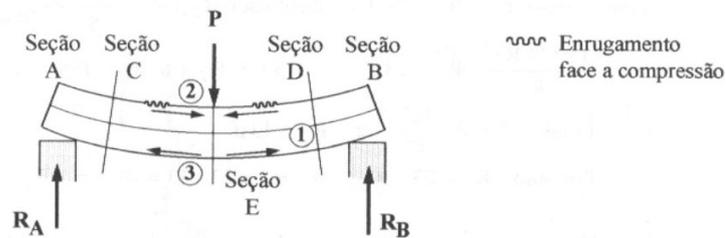
Observe que os dois sinais negativos de  $y$  se cancelaram. A integral que aparece na expressão acima é uma propriedade geométrica associada à seção transversal que é denominada *momento de inércia*:

$$\boxed{I = \int_A y^2 dA}$$

Finalmente, chega-se a uma relação entre o momento fletor e a curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

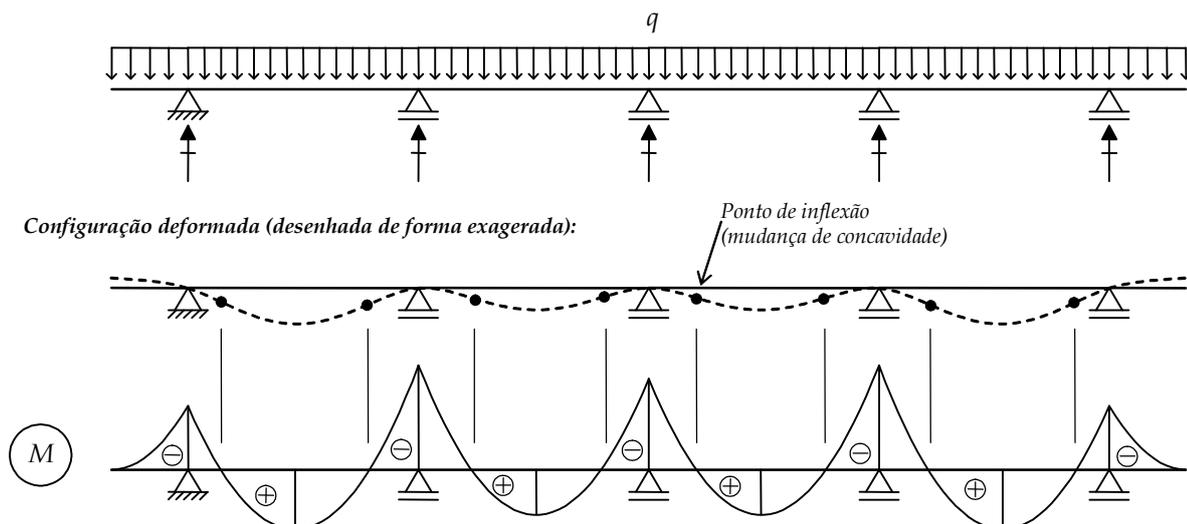
A análise desta relação resulta em importantes conclusões sobre o comportamento de vigas submetidas a cargas transversais. Conforme mencionado anteriormente, quando o momento fletor é positivo ( $M > 0$ ), as fibras superiores da seção transversal são comprimidas e as fibras inferiores são tracionadas. Isto está associado a uma deformação da viga com a concavidade para cima.



Para momentos fletores negativos ( $M < 0$ ), o inverso ocorre: a viga tem uma deformação com concavidade para baixo, as fibras superiores da seção transversal são tracionadas e as fibras inferiores são comprimidas.

Pode-se concluir que nas seções transversais onde o momento fletor tiver um valor nulo ( $M = 0$ ), a curvatura (concavidade) é nula. Isto é, para  $M = 0$ ,  $(1/\rho) = 0$ . De fato, quando uma barra não tem momento fletor (e por conseguinte também não tem esforço cortante), ela se deforma sem curvatura, isto é, mantendo-se reta. Esse é justamente o caso de barras de treliça, que só têm esforço normal.

A figura abaixo mostra a configuração deformada e o digrama de momentos fletores de uma viga contínua submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída.



Repare que nos trechos onde o momento fletor é negativo a concavidade é para baixo e nos trechos onde o momento fletor é positivo a concavidade é para cima. Nos pontos onde o momento fletor se anula há uma mudança de concavidade. Estes pontos são chamados de pontos de *inflexão*.

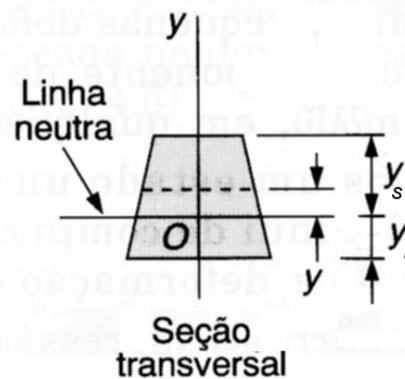
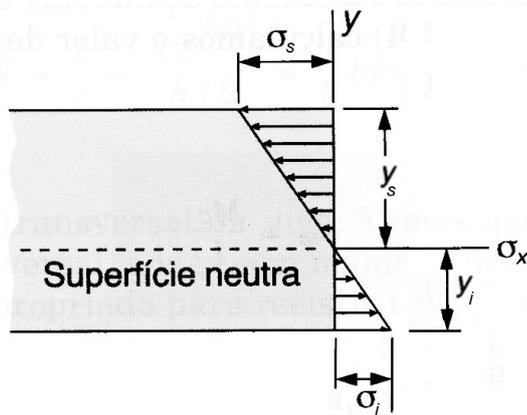
## Relação entre tensão normal e momento fletor

Utilizando a relação entre a tensão normal e a curvatura e a relação entre o momento fletor e a curvatura, chega-se a uma relação direta entre a tensão normal e o momento fletor:

$$\sigma_x = E \frac{-y}{\rho} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_x = -\frac{M \cdot y}{I}}$$

Com base nesta expressão pode-se determinar a tensão no bordo inferior e a tensão no bordo superior de uma seção transversal submetida a um momento fletor:

$$\boxed{\sigma_i = \frac{M \cdot y_i}{I}} \quad \text{e} \quad \boxed{\sigma_s = -\frac{M \cdot y_s}{I}}$$



Sendo  $y_i$  e  $y_s$  as máximas distâncias dos bordos inferior e superior à linha neutra, respectivamente.

Os sinais dessas expressões estão consistentes com a convenção de sinais para momentos fletores. Isto é, momentos fletores positivos estão associados à tração (tensão normal positiva) das fibras inferiores ( $y < 0$ ) da viga e à compressão (tensão normal negativa) das fibras superiores ( $y > 0$ ):

$$M > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_i > 0 & \text{para } y < 0 \\ \sigma_s < 0 & \text{para } y > 0 \end{cases}$$

E momentos fletores negativos estão associados à compressão das fibras inferiores e à tração das fibras superiores.

$$M < 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_i < 0 & \text{para } y < 0 \\ \sigma_s > 0 & \text{para } y > 0 \end{cases}$$

Vê-se nas expressões mostradas acima para  $\sigma_i$  e  $\sigma_s$  que as tensões nos bordos inferior e superior só dependem do valor momento fletor  $M$  das relações geométricas  $y_i/I$  e  $y_s/I$ . Estas relações só dependem da geometria da seção transversal e são chamadas de *módulos de resistência à flexão* da seção transversal:

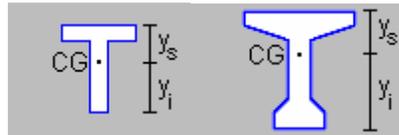
$$\boxed{W_i = \frac{I}{y_i}} \quad (\text{módulo de resistência inferior})$$

$$\boxed{W_s = \frac{I}{y_s}} \quad (\text{módulo de resistência superior})$$

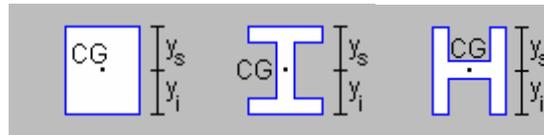
Dessa forma, as tensões nos bordos inferior e superior da seção transversal ficam determinadas pelas expressões:

$$\sigma_i = \frac{M}{W_i} \quad \text{e} \quad \sigma_s = -\frac{M}{W_s}$$

No caso geral, os valores dessas tensões são diferentes pois a distância do centro de gravidade da seção transversal aos dois bordos é diferente, como nas seções do tipo T mostradas abaixo:



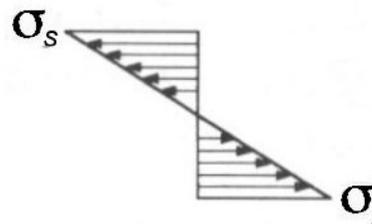
No caso de seções transversais simétricas em relação à linha neutra, isto é, nas quais o centro de gravidade se situa na metade da altura da seção, tem-se que  $y_i = y_s$  e, portanto,  $W_i = W_s$ . Isso ocorre, por exemplo, em seções transversais retangulares ou em perfis I ou H:



Para essas seções, as tensões nos bordos inferior e superior são iguais em módulo, isto é:

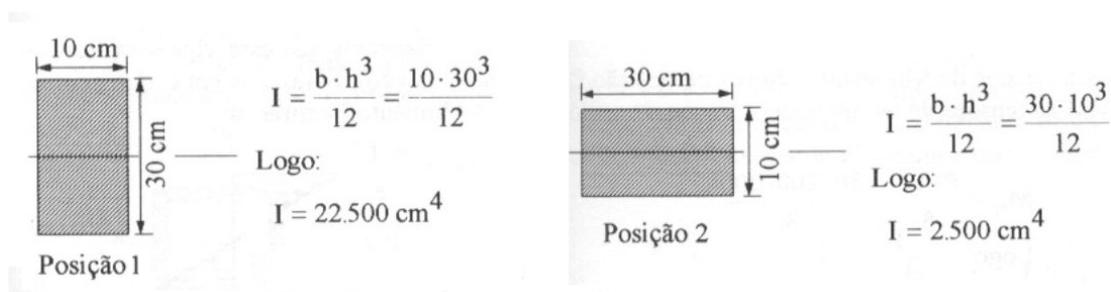
$$W = W_i = W_s.$$

$$|\sigma_i| = |\sigma_s| = \frac{M}{W}$$



### **Influência do momento de inércia da seção transversal**

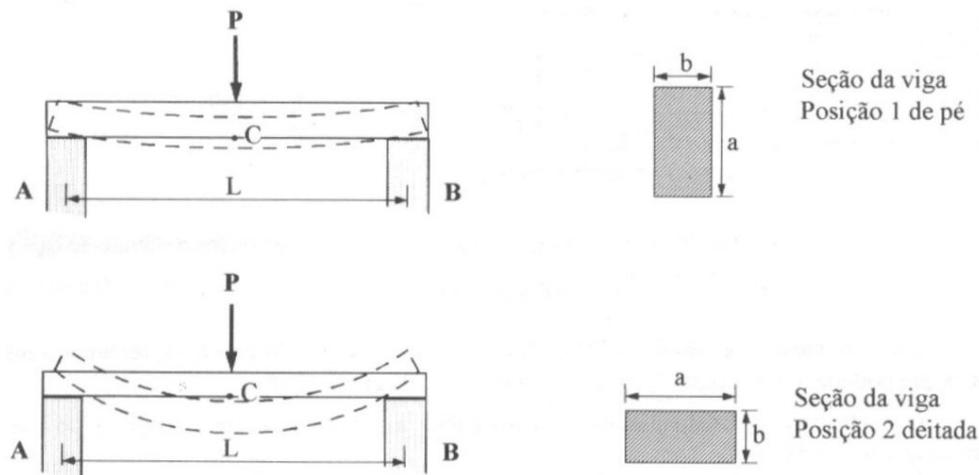
O momento de inércia da seção transversal é uma propriedade geométrica que depende de sua orientação com respeito ao plano onde ocorre a flexão da barra. Tome, por exemplo, a seção retangular mostrada abaixo.



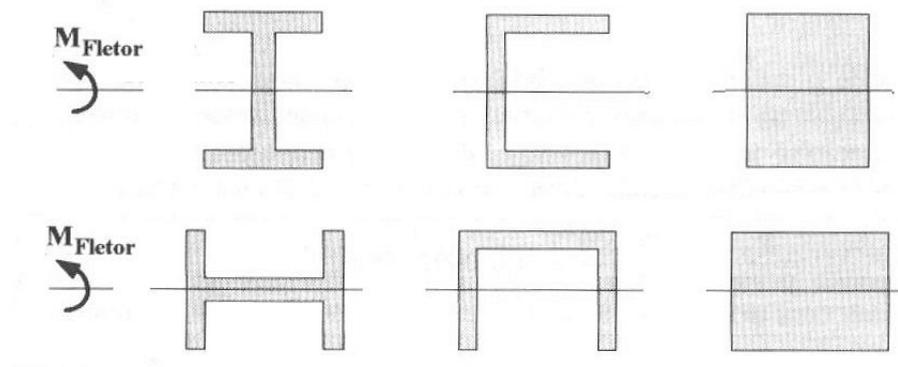
De uma maneira geral, o momento de inércia para esta seção é  $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$ , sendo  $b$  a base e  $h$  a altura do retângulo.

O momento de inércia para a posição 1 (viga em pé) é maior do que o momento de inércia para a posição 2 (viga deitada), pois no primeiro caso a altura  $h$  tem o maior valor.

Portanto, a orientação da viga é importante para a sua resistência à flexão. Uma viga biapoiada com a seção em pé vai apresentar flexões menores (menores curvaturas) do que a mesma viga com a seção deitada.

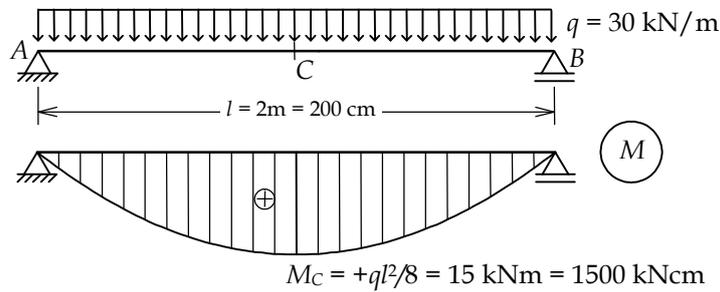


As orientações das seções da primeira linha abaixo são mais resistentes do que as orientações da segunda linha:



## Exemplo de determinação de tensões máximas para uma viga biapoiada

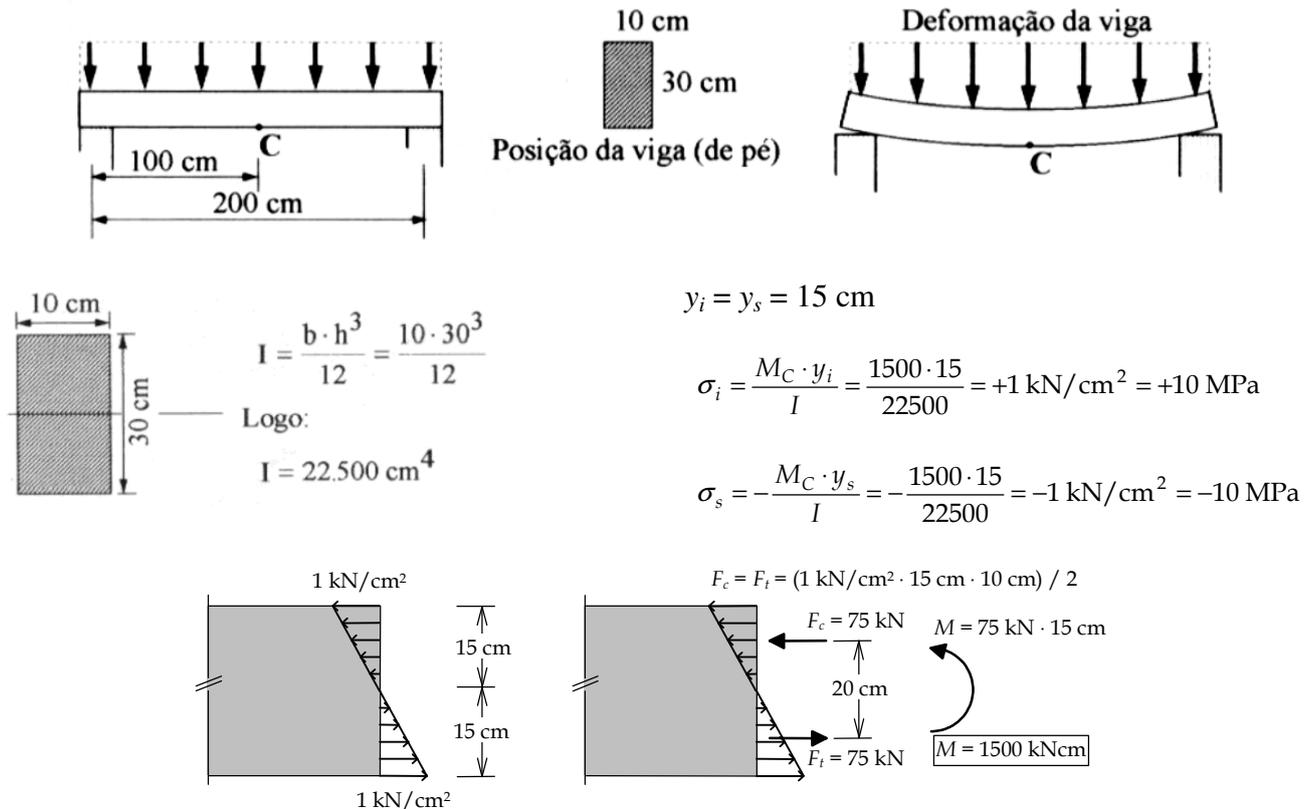
Considere uma viga biapoiada de madeira de 2 metros de vão, com uma seção transversal retangular de 10 x 30 cm, sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 30 kN/m.



O momento fletor máximo na viga ocorre na seção central  $C$  e o valor é  $M_C = +1500 \text{ kNcm}$  (tracionando as fibras inferiores). As tensões normais máximas ocorrem na seção central, pois correspondem ao valor máximo do momento fletor. Como a seção é retangular, a tensão no bordo inferior (de tração) é igual em módulo à tensão no bordo superior (de compressão).

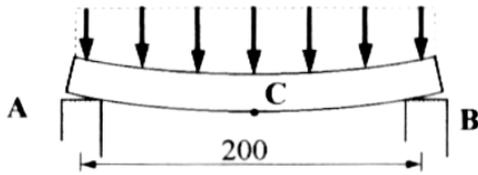
Os valores das tensões máximas dependem do posicionamento da seção transversal. Duas situações serão estudadas: viga em pé e viga deitada.

### Posição 1: viga em pé

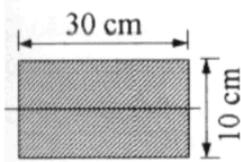
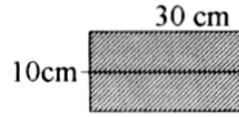


É interessante observar que a resultante  $F_t$  das tensões de tração e a resultante  $F_c$  das tensões de compressão ao longo da seção transversal são iguais em valor e têm sentido contrário. Isto está associado ao fato do esforço normal ser nulo na seção transversal:  $N = \int \sigma_x dA = 0$ . Outro fato interessante é que o momento formado pelas resultantes  $F_t$  e  $F_c$ , com um braço de alavanca de 30 cm, é igual ao valor do momento fletor  $M_C$  na seção transversal.

Posição 2: viga deitada



Seção da viga (posição da viga deitada)



$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{30 \cdot 10^3}{12}$$

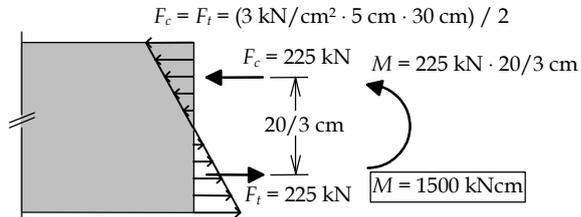
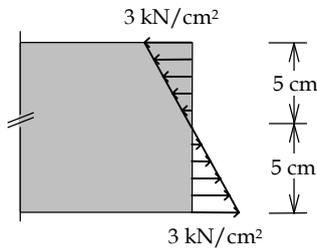
Logo:

$$I = 2.500 \text{ cm}^4$$

$$y_i = y_s = 5 \text{ cm}$$

$$\sigma_i = \frac{M_C \cdot y_i}{I} = \frac{1500 \cdot 5}{2500} = +3 \text{ kN/cm}^2 = +30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = -\frac{M_C \cdot y_s}{I} = -\frac{1500 \cdot 5}{2500} = -3 \text{ kN/cm}^2 = -30 \text{ MPa}$$

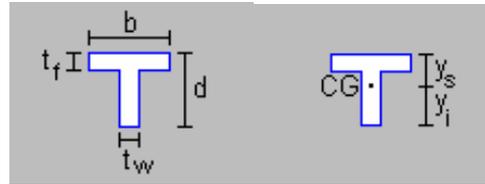
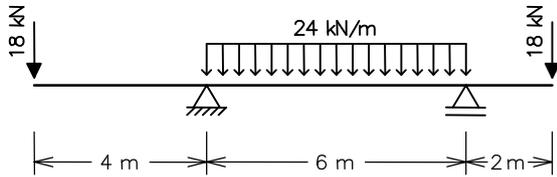


As seguintes conclusões podem ser obtidas da comparação entre a análise da viga de madeira em pé e deitada:

- O posicionamento da viga deitada apresenta uma curvatura maior do que para o caso da viga em pé.
- O posicionamento da viga deitada apresenta tensões normais maiores do que para o caso da viga em pé.
- As resultantes de tensões de tração e de compressão são maiores para a viga deitada.
- O momento resultante das tensões de tração e de compressão é igual para a viga em pé e para viga deitada, e é igual ao momento fletor na seção transversal.
- No caso da viga deitada, o braço de alavanca entre as resultantes de tração e compressão é menor do que para a viga em pé. Este é o motivo pelo qual na viga deitada se desenvolvem maiores tensões normais, pois o momento resultante tem que ser sempre igual ao momento fletor na seção.

## Exemplo de determinação de tensões máximas para uma viga biapoiada com balanços e seção transversal do tipo T

Considere a viga mostrada abaixo. A seção transversal também está indicada.



Os parâmetros que definem as dimensões da seção transversal são:

$d = 50$  cm (altura da seção)

$t_w = 12$  cm (largura da alma)

$b = 40$  cm (largura da mesa)

$t_f = 10$  cm (espessura da mesa)

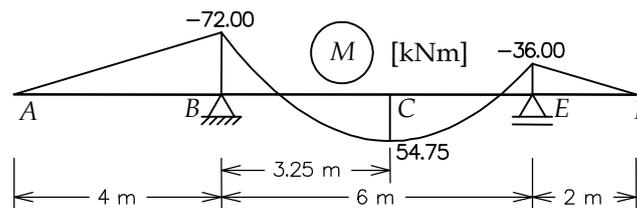
O momento de inércia e as distâncias dos bordos ao centro de gravidade são:

$I = 203697$  cm<sup>4</sup>

$y_i = 31.4$  cm

$y_s = 18.6$  cm

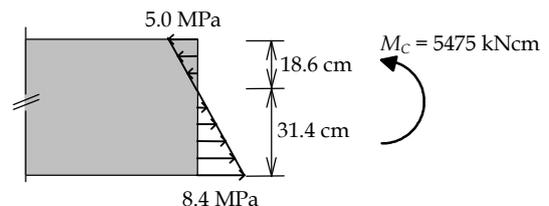
O diagrama de momentos fletores da viga está mostrado abaixo, sendo que o momento fletor máximo positivo é  $M_C = + 54.75$  kNm = + 5475 kNcm e o momento fletor máximo negativo é  $M_B = - 72$  kNm = - 7200 kNcm:



Tensões normais na seção C:

$$\sigma_s = -\frac{M_C \cdot y_s}{I} = -\frac{5475 \cdot 18.6}{203697} = -0.50 \text{ kN/cm}^2 = -5.0 \text{ MPa}$$

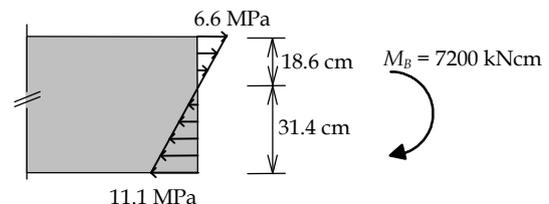
$$\sigma_i = \frac{M_C \cdot y_i}{I} = \frac{5475 \cdot 31.4}{203697} = +0.84 \text{ kN/cm}^2 = +8.4 \text{ MPa}$$



Tensões normais na seção B:

$$\sigma_s = -\frac{M_B \cdot y_s}{I} = -\frac{-7200 \cdot 18.6}{203697} = +0.66 \text{ kN/cm}^2 = +6.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_i = \frac{M_B \cdot y_i}{I} = \frac{-7200 \cdot 31.4}{203697} = -1.11 \text{ kN/cm}^2 = -11.1 \text{ MPa}$$



Um possível critério de dimensionamento seria comparar a máxima tensão normal obtida (11.1 MPa) com o valor da tensão admissível do material utilizado. Se ultrapassasse, seria necessário redimensionar a seção transversal, provavelmente aumentando a sua altura, de forma a aumentar o momento de inércia da seção e o braço de alavanca entre as resultantes de tração e de compressão na seção.