

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS:
CONCEITOS E MÉTODOS BÁSICOS**

ERRATA DA PRIMEIRA EDIÇÃO

Luiz Fernando Martha

ELSEVIER

equilíbrio, outras condições que levam em conta a “deformabilidade” da estrutura devem ser consideradas. Esse assunto é tratado detalhadamente ao longo deste livro.

A determinação da distribuição dos esforços internos em uma estrutura é importante porque define como se dá a transferência de carga através da estrutura reticulada. A distribuição de esforços internos é usualmente mostrada através de *diagramas de esforços internos*, que são um dos principais resultados de uma análise estrutural de pórticos. Por isso, os métodos de análise apresentados neste livro, na maioria das vezes, objetivam a determinação de diagramas de esforços internos.

A convenção de sinais para esforços internos de pórticos planos e outros tipos de estruturas reticuladas é descrita na Seção 3.6.

2.1.6. Ligações internas e liberações de continuidade

A continuidade de deslocamentos através dos pontos de um modelo estrutural também representa abstratamente as ligações internas de uma estrutura. Em uma estrutura reticulada, a continuidade de deslocamentos tem duas abordagens: no interior das barras e nas conexões entre elas. A continuidade no interior das barras é conceitualmente formalizada na idealização do comportamento de barras, que é abordada no Capítulo 5. Esta seção faz uma conceituação das ligações físicas entre as barras de um modelo de pórtico plano.

As ligações entre as barras de um pórtico plano, como os mostrados nas Figuras 2.1, 2.3 e 2.7, são consideradas perfeitas (*ligações rígidas*), a menos que algum tipo de liberação, tal como uma articulação, seja indicado. Isso significa que duas barras que se ligam em um nó têm deslocamentos e rotação compatíveis na ligação. Ligações rígidas caracterizam o comportamento de pórticos e estão associadas à flexão de suas barras.

Em um modelo estrutural de pórtico plano, é possível que algumas ligações entre barras sejam articuladas, isto é, as barras podem girar independentemente na ligação. A Figura 2.8 mostra um exemplo de pórtico metálico onde a ligação entre a viga e a coluna da direita é articulada.

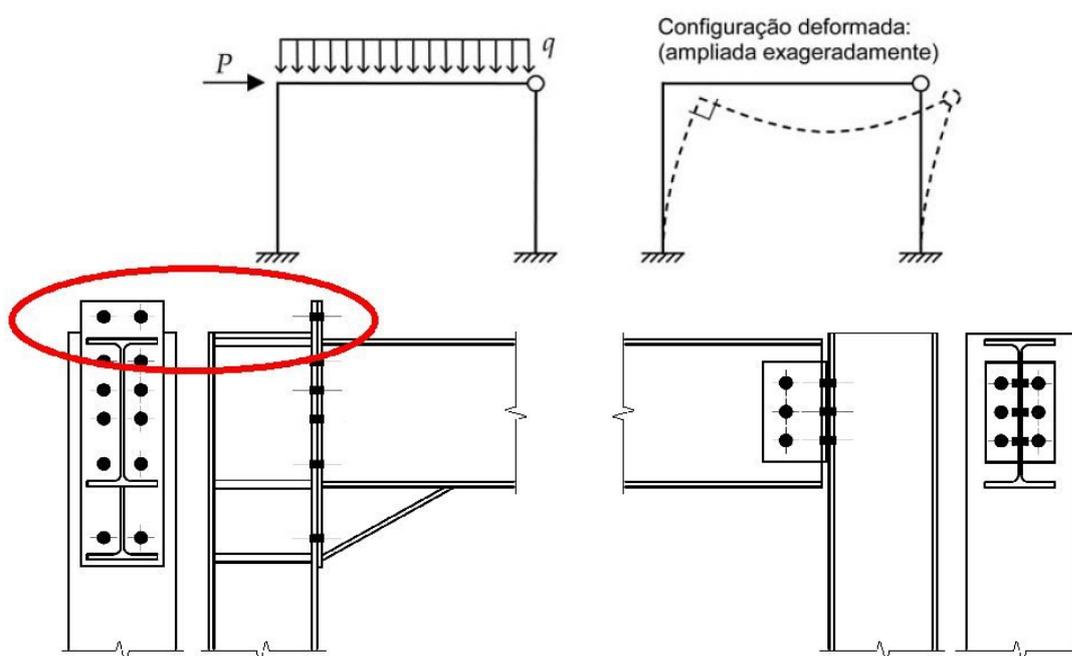


Figura 2.8 – Exemplo de um quadro plano com articulação no nó superior direito.

- A temperatura varia linearmente ao longo da altura da seção transversal (da fibra inferior para a superior). A variação de temperatura da fibra inferior é ΔT_i e a da fibra superior é ΔT_s . A consequência dessa hipótese é que a seção transversal da barra permanece plana com a deformação provocada pela variação de temperatura (considerando um material homogêneo).
- O deslocamento axial relativo interno devido à variação de temperatura (du^T) corresponde ao alongamento ou encurtamento da fibra que passa pelo centro de gravidade da seção transversal. A variação de temperatura nessa fibra (ΔT_{CG}) é obtida por interpolação linear de ΔT_i e ΔT_s .

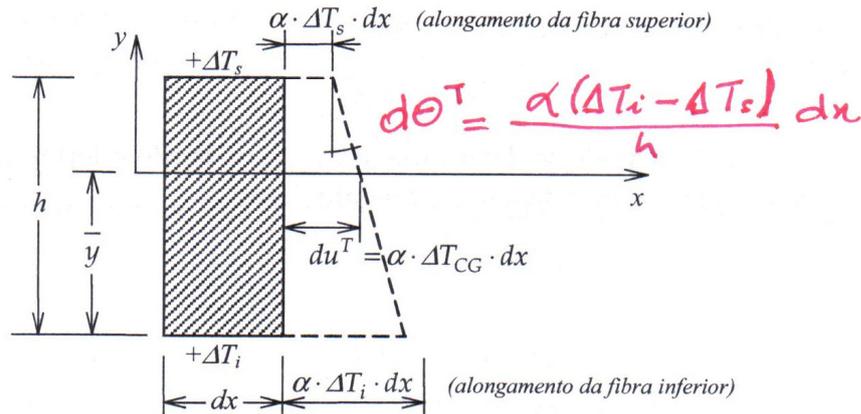


Figura 5.18 – Deformação de um elemento infinitesimal de barra por variação de temperatura.

Com base na Figura 5.18, os deslocamentos relativos internos para uma variação genérica de temperatura são:

$$du^T = \alpha \cdot \Delta T_{CG} \cdot dx \quad (5.26)$$

$$d\theta^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx \quad (5.27)$$

O sinal da rotação relativa interna da Equação 5.27 depende dos valores de ΔT_i e ΔT_s . Conforme indicado na Figura 5.18, quando ΔT_i é maior que ΔT_s (no sentido algébrico), $d\theta^T$ tem sentido anti-horário e é convencionalmente positiva. Visto de outra maneira, o sinal de $d\theta^T$ é positivo quando existe alongamento da fibra inferior da barra em relação à fibra superior. O sinal é negativo quando existe encurtamento da fibra inferior em relação à fibra superior. Os parâmetros que aparecem nas Equações 5.26 e 5.27 são:

α → coeficiente de dilatação térmica do material [\ominus^{-1}];

h → altura da seção transversal da barra [L];

ΔT_i → variação de temperatura na fibra inferior da barra [\ominus];

ΔT_s → variação de temperatura na fibra superior da barra [\ominus];

ΔT_{CG} → variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal da barra [\ominus].

5.5. TENSÕES NORMAIS PROVOCADAS POR EFEITOS AXIAL E DE FLEXÃO

As Seções 5.1.1, 5.1.2 e 5.3 mostram que, na idealização do comportamento de barras, o efeito axial e o efeito de flexão provocam deformações e tensões normais à seção transversal. Portanto, os efeitos axial e de flexão se sobrepõem para a distribuição de tensões normais ao longo da seção transversal, como indicado na Figura 5.8.

O efeito axial provoca uma distribuição uniforme de tensões normais. Da Equação 5.15, tem-se:

fibras da esquerda. O valor do momento fletor no topo da coluna também é $Ph/4$, mas tracionando as fibras da direita, porque o diagrama de momentos fletores varia linearmente ao longo da coluna e o ponto de inflexão está localizado no meio. Na viga infinitamente rígida, os momentos fletores nas extremidades são iguais aos dos topos das colunas, sempre tracionando fibras do mesmo lado: de dentro na esquerda e de fora na direita. O diagrama de momentos fletores resultante é mostrado na Figura 5.35-a.

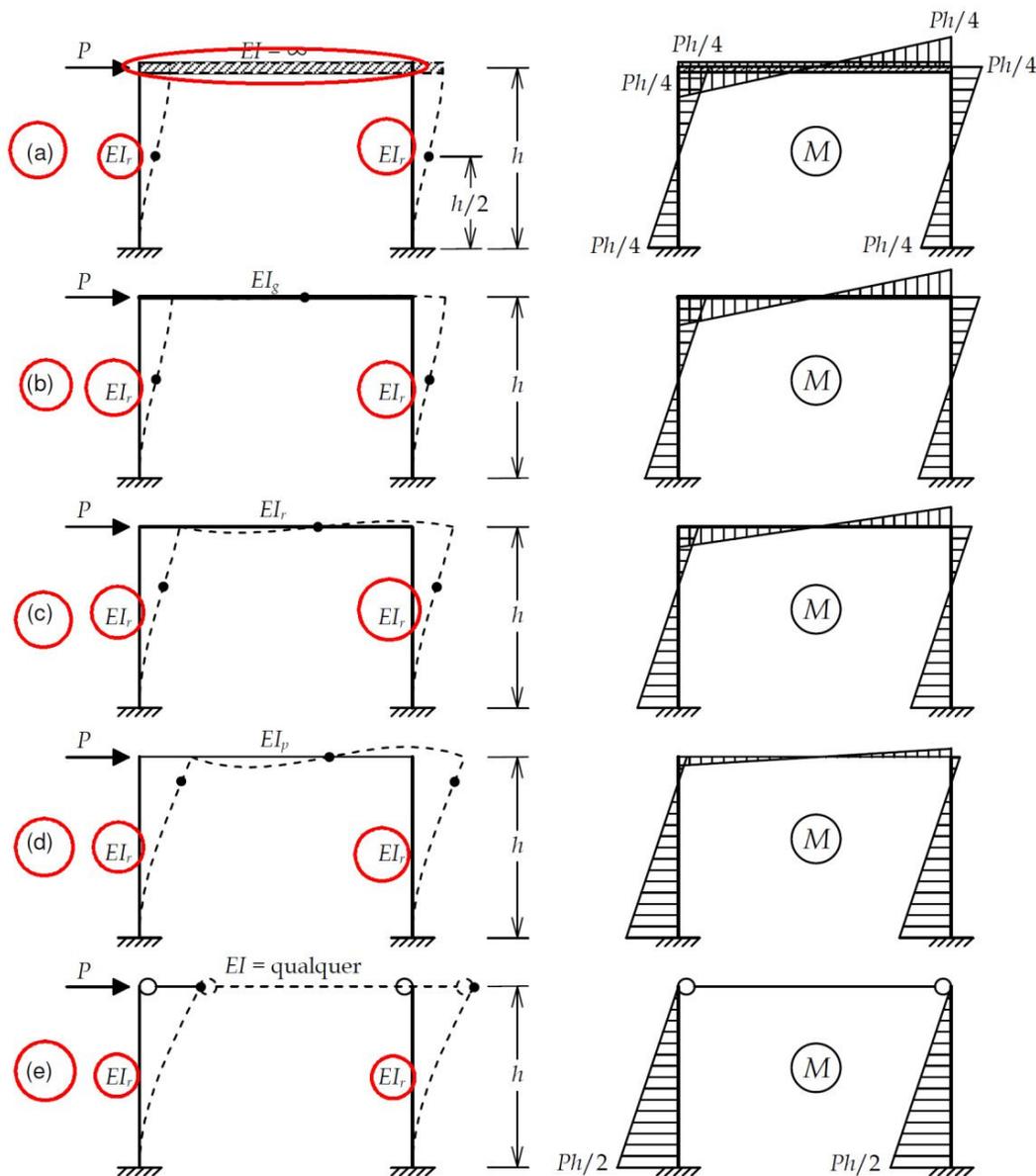


Figura 5.35 – Pórticos simples com carga horizontal: influência da variação de rigidez à flexão da viga.

Na outra situação extrema da Figura 5.35-e, em que a viga não tem rigidez à flexão, o ponto de inflexão da coluna coincide com o ponto da articulação no topo, onde o momento fletor é nulo. Os momentos fletores na viga são nulos e o diagrama de momentos fletores na coluna varia linearmente com um valor $Ph/2$ na base, resultante do produto da metade da força P que atua no topo de cada coluna pela altura h do pórtico.

Observa-se, nas situações intermediárias das Figuras 5.35-b, 5.35-c e 5.35-d, que o ponto de inflexão na coluna se move para cima à medida que a rigidez da viga diminui. Isso foi observado anteriormente: o ponto de inflexão sempre se move na direção de locais com rigidez reduzida.

A Figura 6.12 mostra a notação e os sentidos positivos das reações de engastamento perfeito de uma viga biengastada para um carregamento transversal linearmente distribuído, em que:

- $q_A \rightarrow$ taxa de carregamento transversal distribuído na extremidade inicial (positivo no sentido do eixo local y da barra);
- $q_B \rightarrow$ taxa de carregamento transversal distribuído na extremidade final (positivo no sentido do eixo local y da barra);
- $M_A \rightarrow$ momento de engastamento na extremidade inicial: reação momento que atua na extremidade inicial de uma barra com as extremidades fixas para equilibrá-la quando há uma solicitação externa (positivo no sentido anti-horário);
- $M_B \rightarrow$ momento de engastamento na extremidade final: reação momento que atua na extremidade final de uma barra com as extremidades fixas para equilibrá-la quando há uma solicitação externa (positivo no sentido anti-horário);
- $V_A \rightarrow$ força transversal de engastamento na extremidade inicial: reação força que atua na extremidade inicial de uma barra com as extremidades fixas para equilibrá-la quando há uma solicitação externa (positivo no sentido do eixo y);
- $V_B \rightarrow$ força transversal de engastamento na extremidade final: reação força que atua na extremidade final de uma barra com as extremidades fixas para equilibrá-la quando há uma solicitação externa (positivo no sentido do eixo y).

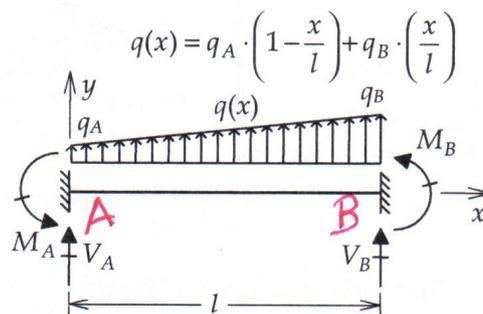


Figura 6.12 – Notação e sentidos positivos de reações de engastamento perfeito para uma barra isolada com força transversal linearmente distribuída.

As reações verticais V_A e V_B podem ser determinadas em função dos parâmetros do carregamento, q_A e q_B , e dos momentos de engastamento, M_A e M_B . Isso é demonstrado com base na superposição de efeitos indicada na Figura 6.13. Cada parcela dessa superposição isola o efeito das reações momento e o efeito do carregamento distribuído, ambos atuando na viga com apoios simples (biapoiada).

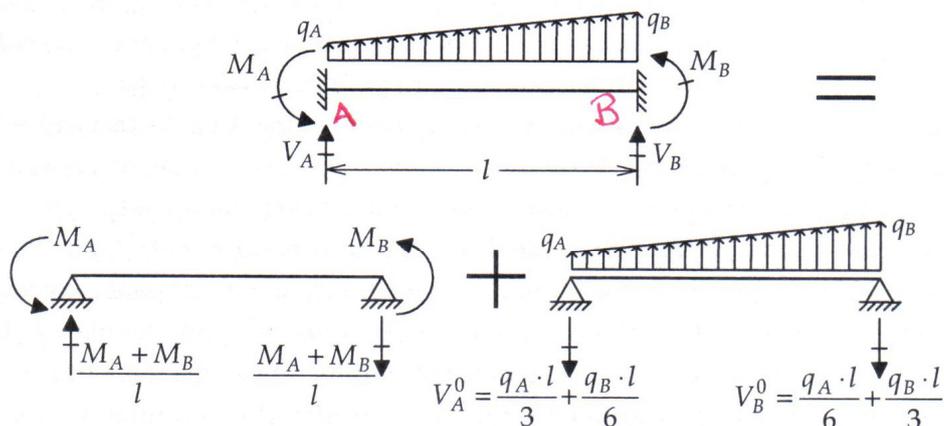


Figura 6.13 – Superposição de efeitos para determinar reações verticais de engastamento de uma barra com força transversal linearmente distribuída.

As reações verticais de apoio V_A^0 e V_B^0 independem da rigidez à flexão EI da barra, pois a viga biapoiada é isostática para cargas transversais. Essas reações são calculadas utilizando apenas condições de equilíbrio. Para o carregamento transversal linearmente distribuído considerado, as reações resultam em:

$$V_A^0 = -\frac{q_A \cdot l}{3} - \frac{q_B \cdot l}{6} \quad (6.1)$$

$$V_B^0 = -\frac{q_A \cdot l}{6} - \frac{q_B \cdot l}{3} \quad (6.2)$$

As expressões para as reações verticais V_A e V_B em função de q_A , q_B , M_A e M_B são obtidas utilizando a superposição mostrada na Figura 6.13:

$$V_A = \frac{M_A + M_B}{l} - \frac{q_A \cdot l}{3} - \frac{q_B \cdot l}{6} \quad (6.3)$$

$$V_B = -\frac{M_A + M_B}{l} - \frac{q_A \cdot l}{6} - \frac{q_B \cdot l}{3} \quad (6.4)$$

A Figura 6.14 mostra o diagrama de momentos fletores de uma viga biengastada submetida a uma força transversal linearmente distribuída. Para o sentido positivo (para cima) do carregamento transversal, a reação momento M_A deve ter o sentido horário, o que provocaria um momento fletor positivo na seção A. Entretanto, a dedução genérica desse problema está considerando sentidos positivos para todos os parâmetros q_A , q_B , M_A e M_B . Por isso, o diagrama de momentos fletores mostrado na Figura 6.14 tem valor negativo em A e positivo em B e apresenta concavidade para baixo.

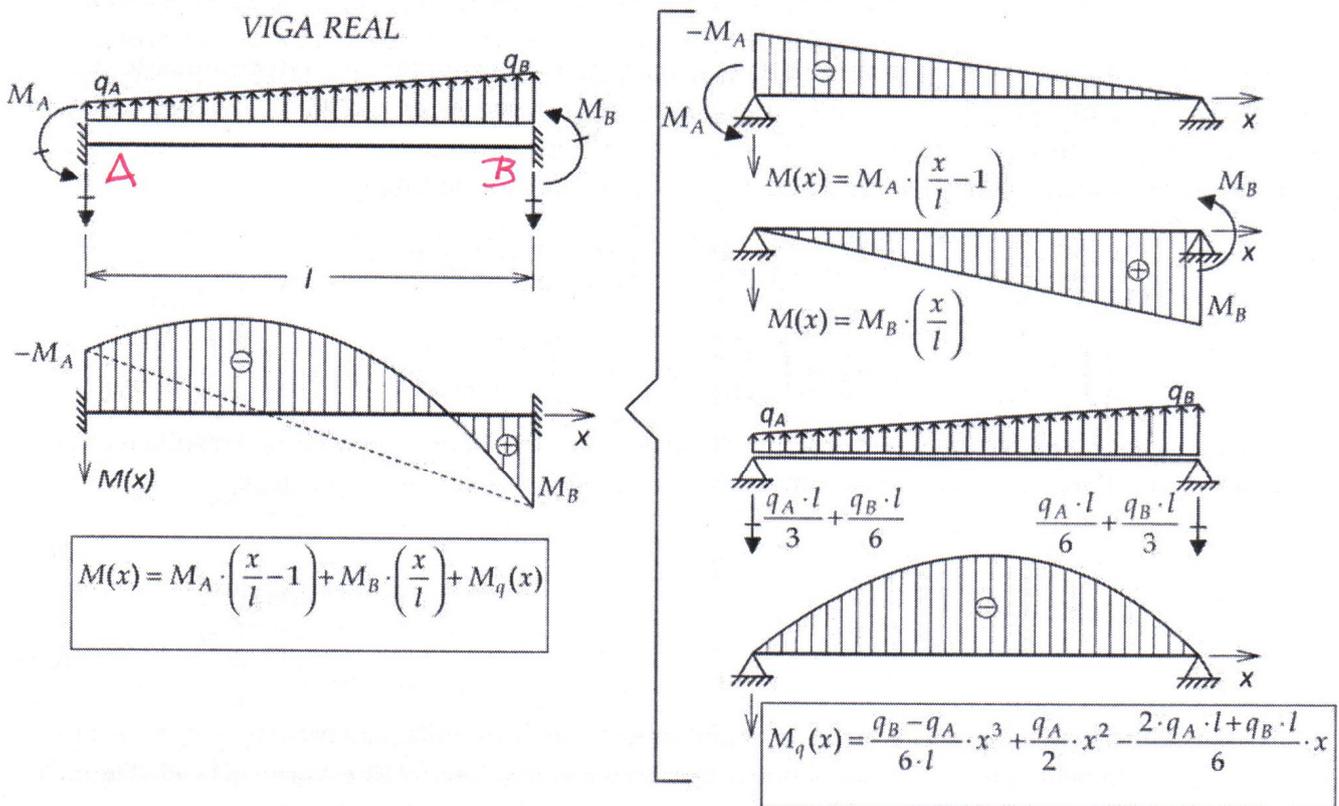


Figura 6.14 – Diagrama de momentos fletores de viga biengastada para uma força linearmente distribuída.

É conveniente decompor o diagrama de momentos fletores na viga de forma a explicitar os valores de M_A e M_B . Além disso, o efeito da força distribuída também é separado no diagrama. Conforme indica a Figura 6.14, o diagrama de momentos fletores é dividido em três parcelas: duas lineares (uma

que depende só de M_A e outra só de M_B) e uma cúbica $M_q(x)$, que corresponde ao polinômio do 3º grau resultante da força linearmente distribuída atuante na viga biapoada:

$$M(x) = M_A \cdot \left(\frac{x}{l} - 1\right) + M_B \cdot \left(\frac{x}{l}\right) + M_q(x) \quad (6.5)$$

$$M_q(x) = \frac{q_B - q_A}{6 \cdot l} \cdot x^3 + \frac{q_A}{2} \cdot x^2 - \frac{2 \cdot q_A \cdot l + q_B \cdot l}{6} \cdot x \quad (6.6)$$

Para determinar os valores de M_A e M_B pela analogia da viga conjugada, é necessário converter as condições de contorno em termos de deslocamentos e rotação da viga real em condições de contorno em termos de momentos fletores e esforços cortantes na viga conjugada. A tradução dessas condições de contorno é mostrada na Figura 6.15 e segue o que está indicado na Tabela 6.3. As duas extremidades da viga conjugada estão livres (sem apoio). Essa figura também mostra o carregamento na viga conjugada, que corresponde a $q^c(x) = M(x)/EI(x)$, sendo que $M(x)$ é dado pelas Equações 6.5 e 6.6.

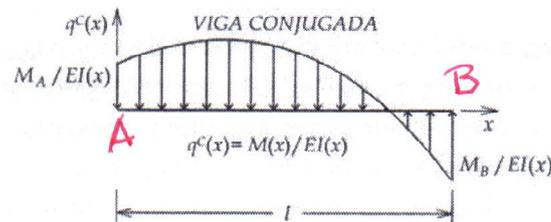


Figura 6.15 – Viga conjugada e seu carregamento para a determinação dos momentos de engastamento em barra com inércia variável para uma força linearmente distribuída.

Considerando que o carregamento da viga conjugada é autoequilibrado, a determinação dos momentos de engastamento M_A e M_B é feita impondo duas equações de equilíbrio na viga conjugada. A primeira impõe que o somatório das forças verticais na viga conjugada seja nulo, e a segunda, que o somatório dos momentos em relação ao ponto A na viga conjugada seja nulo:

$$\left(\int_0^l \frac{(x/l) - 1}{EI(x)} dx \right) \cdot M_A + \left(\int_0^l \frac{x/l}{EI(x)} dx \right) \cdot M_B + \int_0^l \frac{M_q(x)}{EI(x)} dx = 0 \quad (6.7)$$

$$\left(\int_0^l \frac{(x^2/l) - x}{EI(x)} dx \right) \cdot M_A + \left(\int_0^l \frac{x^2/l}{EI(x)} dx \right) \cdot M_B + \int_0^l \frac{M_q(x) \cdot x}{EI(x)} dx = 0 \quad (6.8)$$

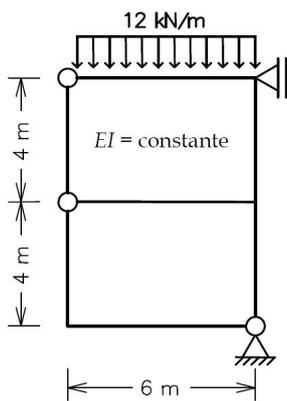
As Equações 6.7 e 6.8 formam um sistema de duas equações a duas incógnitas que resulta na solução para M_A e M_B . Para o caso de barras com momento de inércia constante, a solução é:

$$M_A = -\frac{q_A \cdot l^2}{20} - \frac{q_B \cdot l^2}{30} \quad (6.9)$$

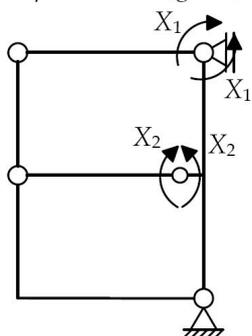
$$M_B = +\frac{q_A \cdot l^2}{30} + \frac{q_B \cdot l^2}{20} \quad (6.10)$$

Observe que, para uma solicitação de força uniformemente distribuída para baixo ($q_A = q_B = -q$), os valores das reações momento são os mesmos obtidos anteriormente: $M_A = +ql^2/12$ e $M_B = -ql^2/12$ (Figura 6.9).

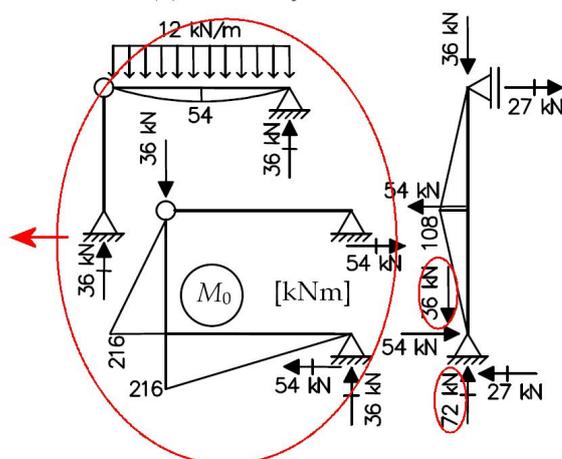
Na situação em que a barra tem inércia variável, os coeficientes do sistema de equações anterior são integrais cujos integrandos correspondem a uma divisão de polinômios, que, no caso geral, não têm solução analítica fechada. Vilela e Martha (2008) fizeram uma implementação numérica dessa metodologia para o caso de mísulas retas, ou seja, quando o momento de inércia varia cubicamente ao longo do comprimento da barra. Os resultados foram comparados com tabelas atribuídas a Guldán apresentadas por Sússekínd (1977-3) e indicam uma solução precisa e eficiente para o problema.



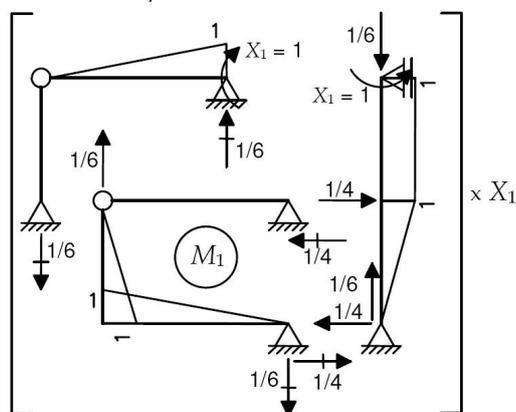
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos ($g = 2$)



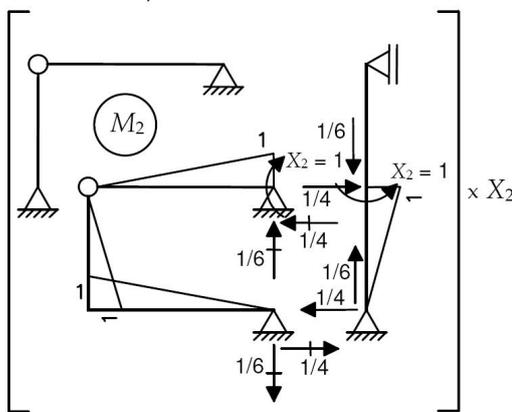
Caso (0) - Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) - Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) - Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -1188 \\ -864 \end{bmatrix} + \frac{1}{3EI} \begin{bmatrix} +32 & +14 \\ +14 & +20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = +78.8 \text{ kNm} \\ X_2 = +74.2 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 54 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 108 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 216 \cdot 4 \right] = -\frac{1188}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \right) + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right] = +\frac{14}{3EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 216 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 108 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 216 \cdot 6 \right] = -\frac{864}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right) + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \right) \right] = +\frac{32}{3EI} \quad \delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \right) \right] = +\frac{20}{3EI}$$

Momentos Fletores Finais:

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$

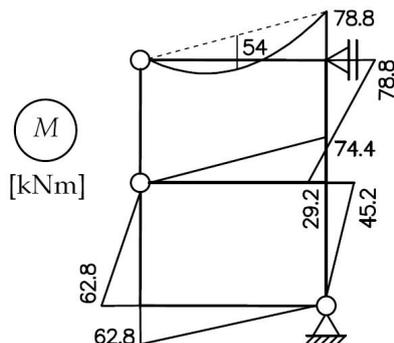


Figura 8.39 – Exemplo de solução de quadro plano hiperestático pelo método das forças.

8.8. ANÁLISE DE VIGAS E PÓRTICOS PLANOS HIPERESTÁTICOS SUBMETIDOS À VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

Variações de temperatura provocam deformações e esforços internos em estruturas hiperestáticas, e as solicitações térmicas podem ser de grande importância para o dimensionamento desse tipo de estrutura. Essa é uma das características que diferenciam o comportamento de estruturas hiperestáticas e estruturas isostáticas, pois variações de temperatura só provocam deformações e deslocamentos em estruturas isostáticas, sem o aparecimento de esforços internos. Essa diferença de comportamento foi discutida de forma intuitiva na Seção 4.5 e analisada pela analogia da viga conjugada na Seção 6.8. A explicação para isso é que uma estrutura isostática não oferece resistência às deformações térmicas de uma barra, posto que o restante da estrutura isostática sem aquela barra se configura em um mecanismo que se ajusta livremente à nova geometria da barra com deformações térmicas.

Esta seção apresenta a aplicação do método das forças para analisar vigas e pórticos planos submetidos a variações térmicas. Para entender os princípios básicos desse tipo de análise, será estudado inicialmente um exemplo muito simples de uma viga biapoiada com dois apoios que restringem o movimento horizontal, como ilustrado na Figura 8.40. A figura também mostra o sistema principal e o hiperestático adotados.

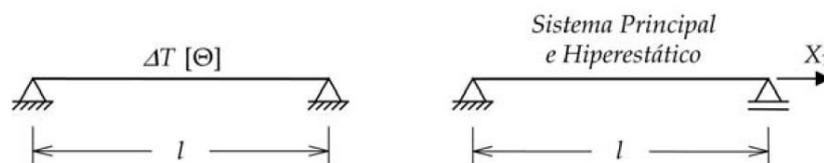


Figura 8.40 – Viga biapoiada com restrição ao movimento horizontal nos dois apoios, solicitada por uma variação uniforme de temperatura.

A viga da Figura 8.40 é solicitada por uma variação uniforme de temperatura e tem os seguintes parâmetros:

E → módulo de elasticidade do material [F/L^2];

α → coeficiente de dilatação térmica do material [$Θ^{-1}$];

l → comprimento da viga [L];

A → área da seção transversal (constante) [L^2];

ΔT → variação uniforme de temperatura [$Θ$].

O caso (0) do método das forças para esse exemplo é mostrado na Figura 8.41. O termo de carga δ_{10} é o deslocamento horizontal no ponto do apoio eliminado associado a X_1 , provocado pela variação uniforme de temperatura no caso (0).

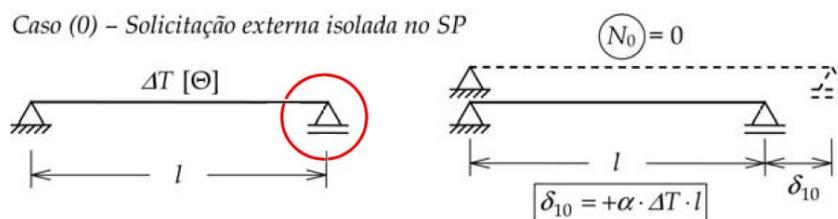


Figura 8.41 – Solicitação externa (variação uniforme de temperatura) isolada no SP da Figura 8.40.

sendo:

$$d\theta_0^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (0 - 50)}{0.60} dx = -\alpha \cdot \frac{250}{3} \cdot dx$$

Isso resulta em:

$$\delta_{10}^T = -\alpha \cdot \frac{250}{3} \cdot \int_0^{12} M_1 dx = -\alpha \cdot \frac{250}{3} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 6 \right) \right]$$

$$\delta_{10}^T = +5.0 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Para o cálculo da contribuição do recalque de apoio δ_{10}^p pelo PFV, considera-se que o trabalho externo virtual é igual à soma do produto de $X_1 = 1$ por δ_{10}^p com o produto da reação vertical V_{E1} no apoio direito do caso (1) pelo recalque de apoio ρ_{E0} :

$$\overline{W}_E = 1 \cdot \delta_{10}^p + V_{E1} \cdot \rho_{E0}$$

Nesse caso, a energia de deformação interna virtual é nula ($\overline{U} = 0$), pois o recalque de apoio não provoca deformações no caso (0) isostático. Dessa forma,

$$1 \cdot \delta_{10}^p + V_{E1} \cdot \rho_{E0} = 0 \Rightarrow \delta_{10}^p = -V_{E1} \cdot \rho_{E0} = -(-1/6) \cdot (-0.03)$$

$$\delta_{10}^p = -5.0 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

O valor final do termo de carga é:

$$\delta_{10} = \delta_{10}^p + \delta_{10}^T + \delta_{10}^p = -1.8 \times 10^{-3} - 5.0 \times 10^{-3} + 5.0 \times 10^{-3} = -1.8 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Observe que, por coincidência de valores, o efeito da variação de temperatura e o efeito do recalque de apoio se cancelam. Resolvendo a equação de compatibilidade, chega-se ao valor do hiperestático:

$$X_1 = -\delta_{10} / \delta_{11} = -(-1.8 \times 10^{-3}) / 4 \times 10^{-5} = +45 \text{ kNm}$$

Finalmente, através da superposição $M = M_0 + M_1 \cdot X_1$, chega-se ao diagrama de momentos fletores finais mostrado na Figura 8.56.

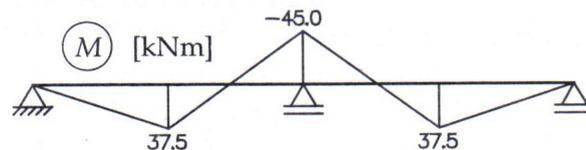


Figura 8.56 – Diagrama de momentos fletores finais da viga contínua da Figura 8.53.

Portanto, chega-se ao mesmo resultado da análise dessa viga pela analogia da viga conjugada, conforme indica a Figura 6.24.

8.11. ANÁLISE DE TRELIÇAS PLANAS HIPERESTÁTICAS

A primeira questão a se abordar para a análise de uma treliça plana hiperestática é a criação do sistema principal. Para tanto, é necessário determinar o grau de hiperestaticidade da treliça e identificar os vínculos excedentes, que podem ser externos ou internos. A Seção 3.8.3 resume o procedimento adotado para determinar o grau de hiperestaticidade g de uma treliça plana. Essencialmente, o número de incógnitas do problema do equilíbrio estático de uma treliça plana é igual ao número de barras mais o número de componentes de reações de apoio. O grau de hiperestaticidade é a diferença entre o número de incógnitas e o número de equações de equilíbrio, que é igual ao dobro do número de nós.

Dois exemplos ilustram a análise de grelhas hiperestáticas. O primeiro, apresentado na Figura 8.68 com a solução completa, é a grelha com quatro apoios simples da Figura 8.67 adotando-se um SP válido, isto é, evitando três apoios simples em um único eixo. O segundo exemplo é uma grelha, mostrada na Figura 8.69, com um engaste e dois apoios simples, resultando em um grau de hiperestaticidade $g = 2$.

Nos dois exemplos, é indicada uma relação entre a rigidez à flexão EI e a rigidez à torção GJ_t , que é a mesma para todas as barras, sendo E o módulo de elasticidade do material, G o módulo de cisalhamento do material, I o momento de inércia à flexão da seção transversal e J_t o momento de inércia à torção da seção transversal. Em ambas as soluções, despreza-se a contribuição da energia de deformação pelo efeito de cisalhamento.

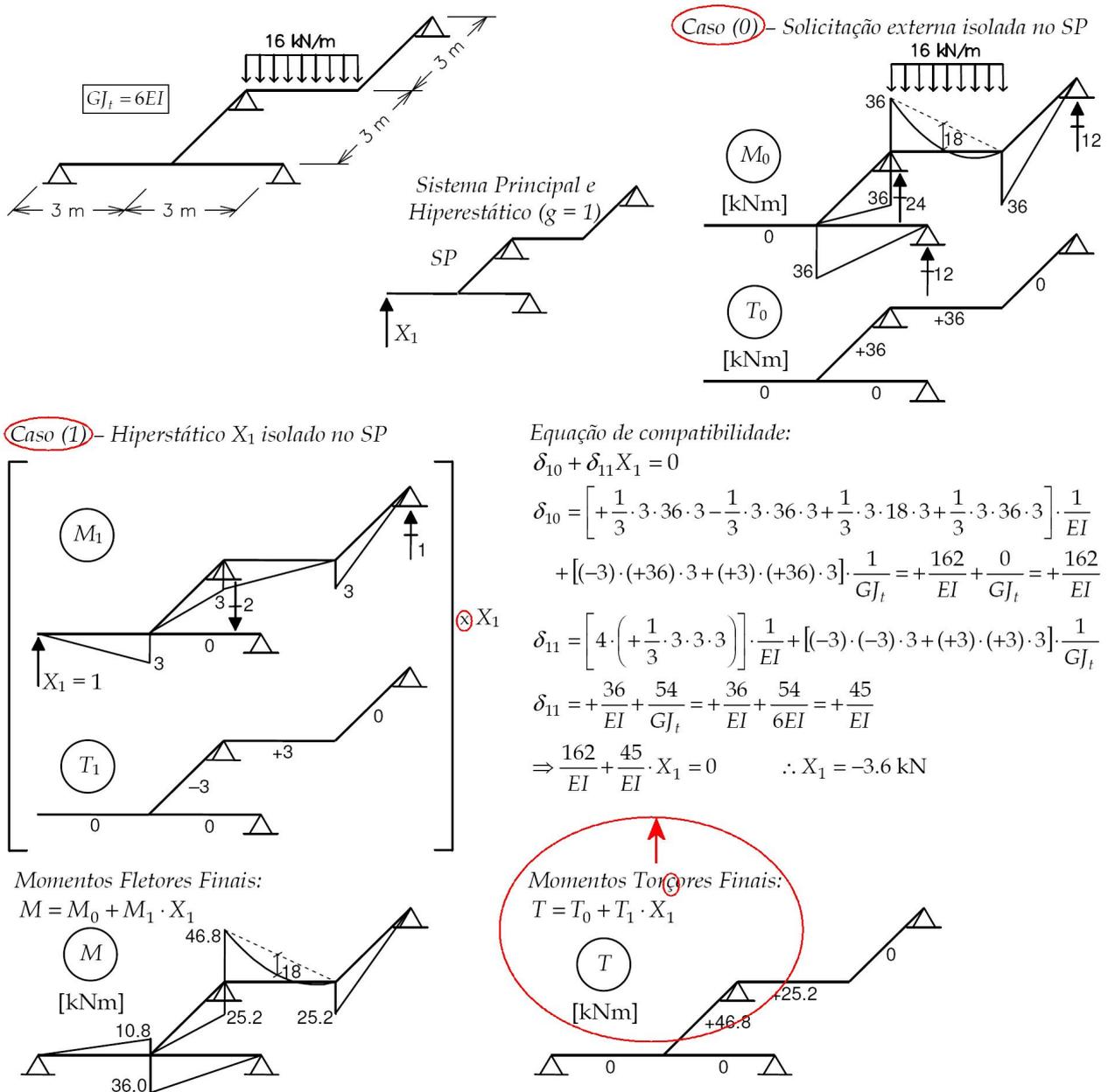


Figura 8.68 – Análise de grelha com quatro apoios simples.

O sistema principal da solução da Figura 8.68, sem a barra em balanço, corresponde ao exemplo de grelha triapoiada isostática analisado na Seção 3.7.9 (Figura 3.48). Portanto, os procedimentos adotados para o traçado dos diagramas de momentos fletores (M_0) e torçores (T_0) do caso (0) são descritos na Seção

provocados pelo carregamento externo. Nos casos básicos (1) e (2), os coeficientes de flexibilidade δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} e δ_{22} são deslocamentos verticais nos pontos dos apoios liberados provocados por hiperestáticos com valores unitários.

Na solução das duas grelhas, os termos de carga são determinados de acordo com a Equação 8.9, e os coeficientes de flexibilidade são dados pela Equação 8.16. As expressões das combinações dos diagramas de momentos fletores e dos diagramas de momentos torçores são indicadas nas Figuras 8.68 e 8.69.

A solução do sistema de equações de compatibilidade está indicada nos dois exemplos, resultando nos valores dos hiperestáticos. Os diagramas finais de momentos fletores e momentos torçores são obtidos pela superposição dos diagramas dos casos básicos, levando em conta os valores determinados para os hiperestáticos.

8.13. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Esta seção propõe uma série de exercícios para a solução de estruturas hiperestáticas pelo método das forças. Para cada modelo, pede-se a determinação dos diagramas de esforços internos correspondentes. Para vigas e quadros planos, pede-se o diagrama de momentos fletores. Para treliças planas, pede-se o diagrama de esforços normais. E, para grelhas, pede-se os diagramas de momentos fletores e momentos torçores. Nos exercícios com vigas e quadros planos, a menos que se indique de outra maneira, a energia de deformação axial não deve ser considerada na determinação dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade. Em nenhum exercício a energia de deformação pelo efeito de cisalhamento deve ser considerada. Além disso, em cada um dos exercícios todas as barras têm o mesmo material e a mesma seção transversal. Os valores dos parâmetros do material e da seção transversal são indicados quando necessário. Como notação, h é a altura da seção transversal, \bar{y} é a distância do centro de gravidade à fibra inferior da seção transversal, e b é a largura de uma seção transversal retangular. No caso de grelhas, a relação entre a rigidez à flexão EI e a rigidez à torção GJ_t das barras é fornecida.

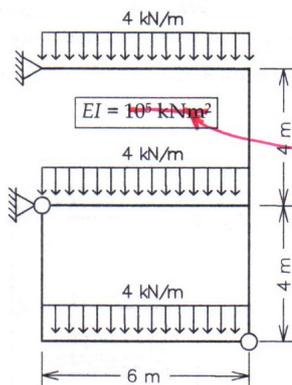


Figura 8.70 – Exercício proposto 1.

constante

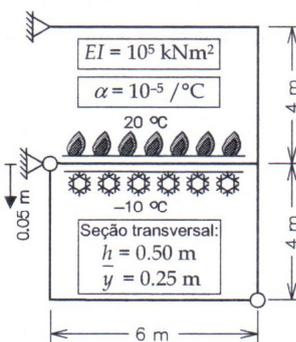


Figura 8.71 – Exercício proposto 2.

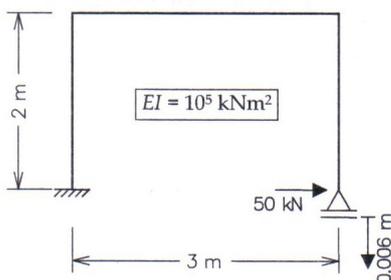


Figura 8.72 – Exercício proposto 3.

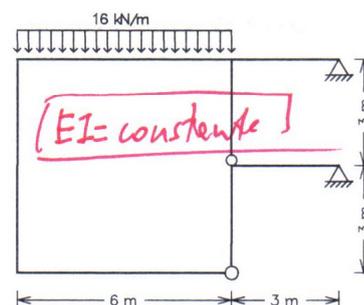


Figura 8.73 – Exercício proposto 4.

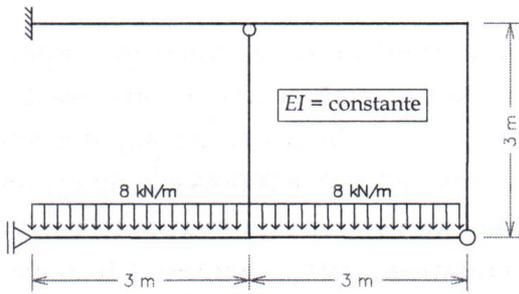


Figura 8.74 – Exercício proposto 5.

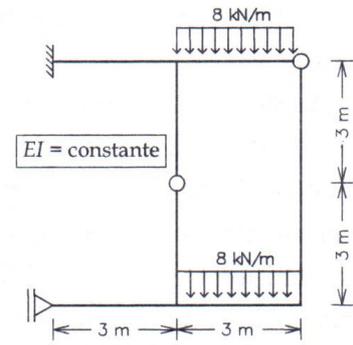


Figura 8.75 – Exercício proposto 6.

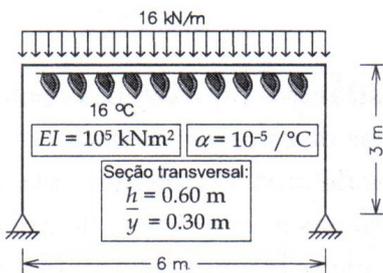


Figura 8.76 – Exercício proposto 7.

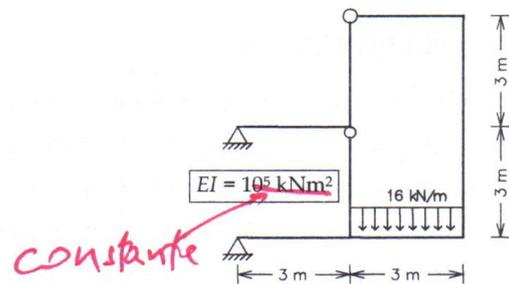


Figura 8.77 – Exercício proposto 8.

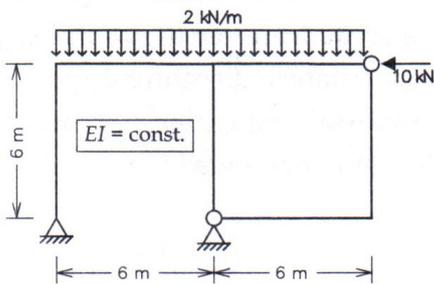


Figura 8.78 – Exercício proposto 9.

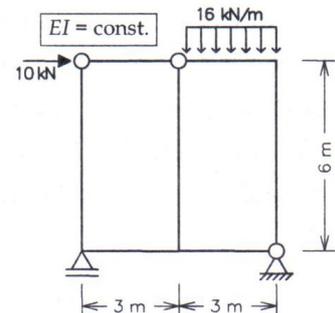


Figura 8.79 – Exercício proposto 10.

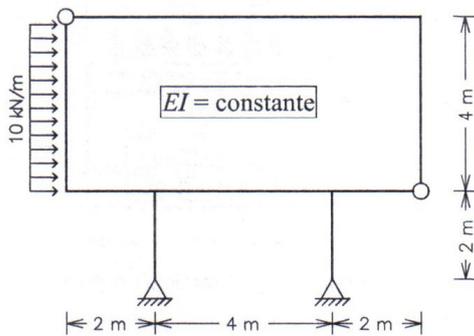


Figura 8.80 – Exercício proposto 11.

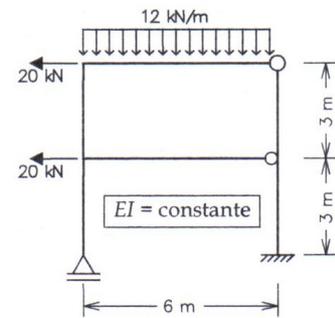


Figura 8.81 – Exercício proposto 12.

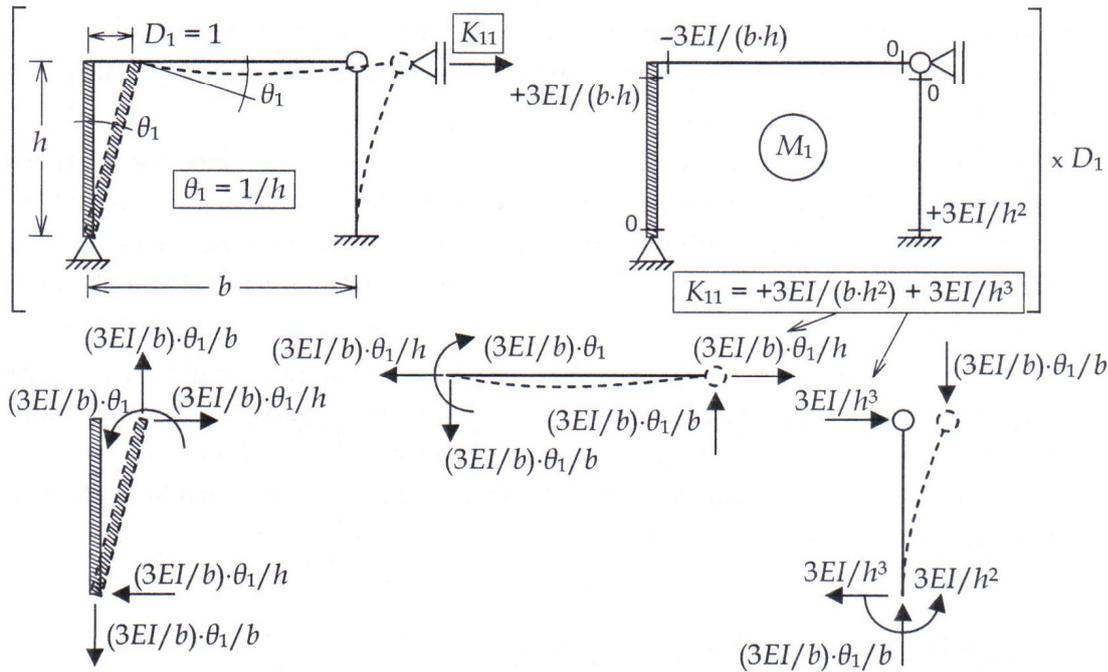


Figura 11.56 – Caso (1) da estrutura da Figura 11.52.

Equação de equilíbrio e determinação do diagrama de momentos fletores finais

Com base no termo de carga β_{10} e no coeficiente de rigidez K_{11} , pode-se determinar o valor da deslocabilidade D_1 , o que é feito a partir da equação de equilíbrio mostrada a seguir:

$$\beta_{10} + K_{11}D_1 = 0 \Rightarrow -P + \left[\frac{3EI}{h^3} \cdot \left(\frac{b+h}{b} \right) \right] \cdot D_1 = 0 \Rightarrow D_1 = + \frac{P \cdot h^3}{3EI} \cdot \left(\frac{b}{b+h} \right)$$

Finalmente, os momentos fletores finais na estrutura podem ser determinados utilizando a superposição de efeitos $M = M_0 + M_1 \cdot D_1$, onde $M_0 = 0$. O diagrama de momentos fletores finais é mostrado na Figura 11.57.

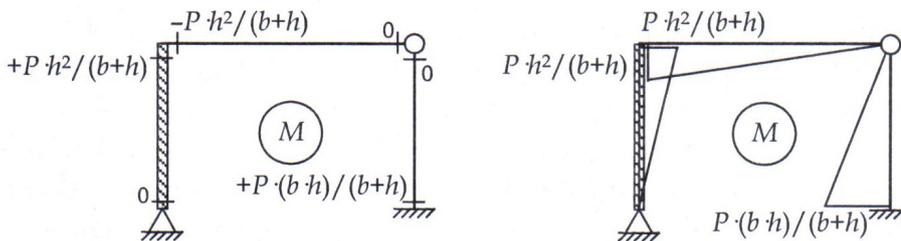


Figura 11.57 – Diagrama de momentos fletores da estrutura da Figura 11.52.

11.5.3. Sugestões para criação do SH de pórticos com barras infinitamente rígidas

Conforme observado anteriormente, é difícil estabelecer regras gerais para identificar deslocabilidades de pórticos com barras infinitamente rígidas. Entretanto, com base em observações feitas nas análises dos exemplos anteriores, pode-se sugerir alguns procedimentos que auxiliam nessa identificação:

1. A identificação de deslocabilidades deve ser feita de forma indireta através da inserção dos apoios para a criação do SH: a cada apoio necessário para fixar os nós da estrutura é identificada uma deslocabilidade.

contínua com três vãos, mostrada na Figura 12.5, e que tem uma inércia à flexão $EI = 2.4 \times 10^4 \text{ kNm}^2$. O primeiro apoio simples do 2º gênero está sendo interpretado como uma articulação na extremidade da barra, sendo que a rotação do nó do primeiro apoio não está sendo considerada como incógnita (Seções 11.4.2 e 11.4.3). Portanto, a viga só tem duas deslocabilidades, que são as rotações D_1 e D_2 das seções transversais dos dois apoios internos.

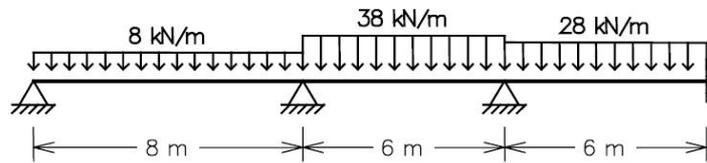


Figura 12.5 – Viga contínua com duas deslocabilidades.

A solução da viga da Figura 12.5 pelo método dos deslocamentos resulta no seguinte sistema de equações de equilíbrio (Capítulos 10 e 11):

$$\begin{cases} (-64 + 114) + (3EI/8 + 4EI/6) \cdot D_1 + (2EI/6) \cdot D_2 = 0 \\ (-114 + 84) + (2EI/6) \cdot D_1 + (4EI/6 + 4EI/6) \cdot D_2 = 0 \end{cases}$$

Substituindo o valor fornecido para EI e passando os termos de carga para o lado direito do sinal de igual, tem-se:

$$\begin{cases} +25000 \cdot D_1 + 8000 \cdot D_2 = -50 & (12.4) \\ +8000 \cdot D_1 + 32000 \cdot D_2 = +30 & (12.5) \end{cases}$$

A solução direta do sistema formado pelas Equações 12.4 e 12.5 resulta nos seguintes valores para as rotações D_1 e D_2 :

$$D_1 = -2.5000 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$D_2 = +1.5625 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Uma alternativa para a solução desse sistema de equações de equilíbrio é uma solução iterativa do tipo Gauss-Seidel. Essa solução é o segundo ponto-chave para o método de distribuição de momentos (o primeiro é a distribuição de momentos em um nó mostrada na Seção 12.2). A solução iterativa é iniciada admitindo um valor nulo para D_2 e encontrando um valor para D_1 com base na Equação 12.4:

$$+25000 \cdot D_1 + 8000 \cdot (0) = -50 \Rightarrow D_1 = -2.0000 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \text{equação (12.4)}$$

O segundo passo da solução iterativa consiste em utilizar esse valor encontrado para D_1 na Equação 12.5 para determinar um valor para D_2 :

$$+8000 \cdot (-2.0000 \times 10^{-3}) + 8000 \cdot D_2 = +30 \Rightarrow D_2 = +1.4375 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

No terceiro passo, a Equação 12.4 é utilizada novamente com o último valor obtido para D_2 para determinar um novo valor para D_1 , resultando em:

$$+25000 \cdot D_1 + 8000 \cdot (+1.4375 \times 10^{-3}) = -50 \Rightarrow D_1 = -2.4600 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

A Tabela 12.1 indica os resultados da solução iterativa após quatro ciclos completos de passagem pelo par de Equações 12.4 e 12.5. Os valores exatos da solução direta também são mostrados na tabela. Pode-se verificar que os valores obtidos pela solução iterativa são bem próximos dos valores exatos. Na verdade, a solução exata sempre pode ser atingida, para um determinado grau de precisão desejado, bastando executar um número suficiente de ciclos.

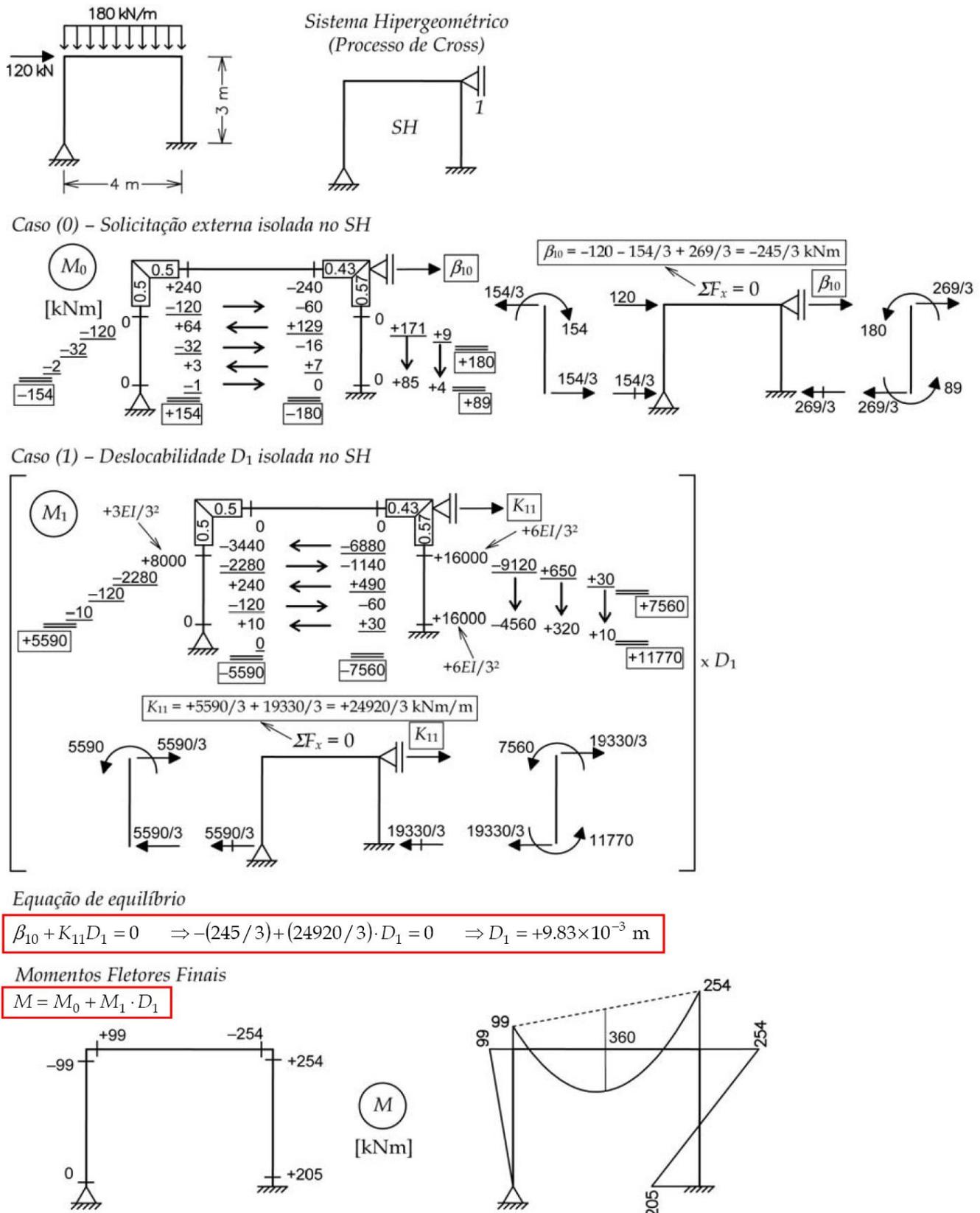


Figura 12.21 – Solução do quadro plano da Figura 12.19 utilizando o processo de Cross.

termo de carga	94, 95, 303, 311, 315, 320, 332, 347, 350, 354, 356, 362, 364, 381, 416, 435
provocado por recalque de apoio	357
provocado por variação de temperatura	356
unidade de coeficiente de rigidez global	94, 304
vetor das deslocabilidades globais	307, 438
vetor das deslocabilidades locais no sistema de eixos locais (ver em barra)	
vetor das forças generalizadas locais no sistema de eixos locais (ver em barra)	
vetor dos termos de carga	307, 416
método dos elementos de contorno	10
método dos elementos finitos	10, 11
discretização	11
elemento finito	10
malha de elementos finitos	10, 11
modelo analítico (ver modelo estrutural)	3
modelo computacional	3, 410
modelo de barras (ver estrutura reticulada)	2
modelo de estruturas reticuladas (ver estrutura reticulada)	11, 17
modelo discreto	3, 7, 10, 11
comportamento discreto	7, 409
concepção	3, 410
discretização	7, 11
geração	11, 411
solução discreta	9
modelo estrutural	3
articulação (ver liberação de continuidade e rótula)	27
articulação completa	78
bidimensional	5, 6
cinematicamente determinado (ver em configuração deformada)	
cinematicamente indeterminado (ver em configuração deformada)	
coeficiente de rigidez à rotação de ligação <u>semirrígida</u>	28
comportamento analítico	7, 409
comportamento linear semirrígida	2, 12, 96, 188
comportamento longitudinal	6
comportamento não linear de ordem geométrica	12, 410
comportamento transversal	6
comportamento tridimensional	6
condição básica	12, 85
condição de compatibilidade	12, 13, 85, 87, 128, 128, 152, 189, 190, 211, 299
condição de equilíbrio de porção isolada	25, 56, 59, 79
condição de equilíbrio (estático)	12, 13, 24, 85, 86, 127, 128, 129, 152, 189, 190, 211, 212, 299
condição de equilíbrio imposta por rótula	28, 77
continuidade interna (de deslocamento ou rotação)	24, 27, 85, 108
domínio geométrico	4

estaticamente determinado (ver em estrutura estaticamente determinada)	
estaticamente indeterminado (ver em estrutura estaticamente indeterminada)	
geometria indeformada	12
idealização do comportamento de material (ver em material)	
idealização (matemática) do comportamento	3, 11, 409
influência da rigidez relativa na distribuição de esforços internos	140
instável	43, 77
hipostático	39, 104
hipótese de barra inextensível (ver em barra)	
hipótese simplificadora	3, 12
liberação de continuidade	27, 417
ligação articulada (ver rótula)	27
ligação interna	24, 27
ligação rígida	27
ligação semirrígida	28
modelagem semirrígida	4
mola rotacional de ligação semirrígida	28
par de momentos aplicados adjacentes a rótula	45, 71
plano	6
relação momento x rotação de ligação semirrígida semirrígida	28
restrição parcial à continuidade de rotação	28
rótula (ver ligação articulada)	28, 417, 418
solução analítica	9, 11
solução contínua	9, 409
tendência de elementos estruturais rígidos de atrair mais esforço interno	137, 140, 393
tendência de pontos de inflexão se moverem para locais com rigidez reduzida	137, 140, 141
tipo de liberação de continuidade	29
tridimensional	4
unidimensional	5
modelo geométrico	
criação	11, 411
modelagem	11
modelo matemático (ver modelo estrutural)	3, 9
momento	18, 24
unidade	18
movimento de apoio (ver em recalque de apoio – solicitação externa)	
não linearidade geométrica	97
nó	
articulado (ver articulação em modelo estrutural)	28
rígido	28
perda de energia na forma de calor	187
peso próprio (ver em solicitação externa)	
pilar (ver em pórtico)	
ponte ferroviária	445, 451
ponte em arco	36
ponte rodoviária	445

Luiz Fernando Martha é professor de análise de estruturas desde 1978, quando ingressou no mestrado em engenharia civil na PUC-Rio. Após seu mestrado, em 1980, atuou como professor em tempo integral no Departamento de Engenharia Civil na PUC-Rio. Em 1981, ingressou como engenheiro na Promon Engenharia, trabalhando no projeto estrutural da Usina Nuclear de Angra II, e continuou atuando como professor em tempo parcial na PUC-Rio. Esse período foi muito importante na sua formação, pois marcou uma tendência para a pesquisa aplicada a projetos de engenharia. Essa tendência foi aprimorada durante o seu doutorado na Universidade de Cornell, de 1984 a 1989, pois ele foi exposto ao uso disseminado de computação gráfica em projetos de engenharia, com uma vertente muito forte no desenvolvimento de ferramentas gráficas com fins educacionais. Desde 1990, ele tem atuado como professor do quadro principal da PUC-Rio e coordenador de área no Tecgraf/PUC-Rio – Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica. A experiência da prática de engenharia, o grande conhecimento de conceitos e fundamentos da análise de estruturas, o desenvolvimento de programas gráficos educacionais e a paixão pelo ensino são características marcantes do autor.

1984

capa: olga loureiro imagem da capa: Nathalia Mussi Weidlich

Consulte nosso catálogo completo e últimos lançamentos em www.elsevier.com.br