PROCESSO DE CROSS

Dois pontos básicos que fundamentam o método:

- a distribuição de um momento aplicado em um nó de um pórtico por parcelas de momentos fletores equilibrantes nas barras adjacentes (Seção 2);
- a solução iterativa do sistema de equações de equilíbrio do método dos deslocamentos para uma estrutura que só tem rotações como deslocabilidades (Seção 3).

1. Interpretação física do método da distribuição de momentos

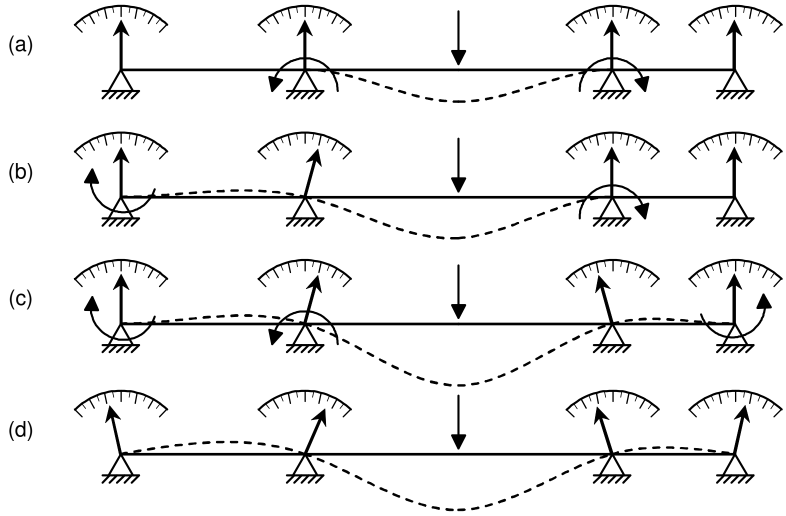


Figura 1 – Reprodução esquemática do experimento para interpretação física do processo de Cross descrito no livro de White, Gergely e Sexsmith (1976).

Pode-se salientar alguns aspectos importantes desse experimento:

- em cada passo do processo iterativo, apenas um nó tem a rotação liberada, enquanto todos os outros têm as rotações fixadas;
- quando um nó é equilibrado pela liberação de sua rotação, as barras adjacentes ao nó se deformam, implicando uma redistribuição de momentos fletores nas barras e afetando o equilíbrio dos nós adjacentes;
- após cada passo, a rotação do nó liberado é fixada com o valor acumulado dos incrementos de rotação de todos os passos anteriores;
- o equilíbrio de um nó que tem a sua rotação travada só é atingido artificialmente com a aplicação de um momento externo pela trava;
- quando os momentos fletores nas seções transversais adjacentes a um nó estão em equilíbrio, não é necessário travar o nó; nesse caso, a trava liberada não exerce momento externo algum no nó.

Com base no experimento, pode-se adiantar dois pontos-chave do processo de Cross. O primeiro é a distribuição de momentos fletores nas barras adjacentes de um nó que tem a sua rotação liberada. A próxima seção faz uma análise dessa redistribuição de momentos fletores. O outro ponto-chave é o próprio processo iterativo e incremental de determinação das rotações nodais. A Seção 3 analisa a solução incremental do sistema de equações de equilíbrio de uma viga contínua. Após a análise desses dois pontos-chave, o processo de Cross é formalizado na Seção 4.

2. Distribuição de momentos fletores em um nó

Para se analisar a distribuição do momento M_E por momentos fletores nas barras da estrutura da Figura 2, emprega-se o método dos deslocamentos. Como as barras são inextensíveis, a estrutura só tem uma deslocabilidade: a rotação do nó central. O sistema hipergeométrico (SH) e os casos básicos da solução pelo método estão mostrados na Figura 3.

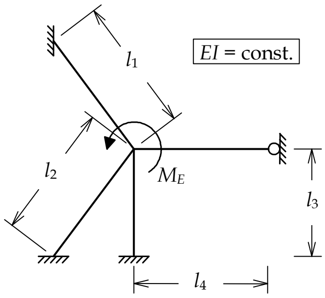


Figura 2 – Aplicação de um momento externo em um nó com rotação liberada.

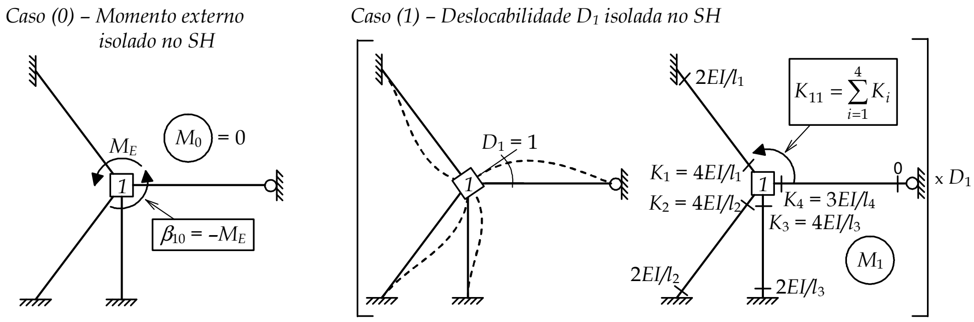


Figura 3 – Casos básicos da solução pelo método dos deslocamentos da estrutura da Figura 2.

Na solução mostrada na Figura 3, utiliza-se a seguinte notação:

$K_i \rightarrow$ coeficiente de rigidez à rotação da barra *i*.

Os valores para rigidez à rotação de barras com *EI* constante são:

$K_i = 4EI/l_i \rightarrow$ barra sem articulação;

$K_i = 3EI/l_i \rightarrow$ barra com articulação na extremidade oposta à extremidade que sofreo giro.

A equação de equilíbrio resultante da solução pelo método dos deslocamentos para essa estrutura é:

$$\beta_{10} + K_{11} D_1 = 0 \, .$$

Os valores do termo de carga β_{10} e do coeficiente de rigidez global K_{11} estão indicados na Figura 3.

A solução dessa equação resulta no valor da deslocabilidade rotação D_1:

$$D_1 = \frac{M_E}{\sum K_i} \, .$$

A determinação dos momentos fletores finais nas barras é feita por superposição dos efeitos dos casos (0) e (1): $M = M_0 + M_1 \cdot D_1$, sendo que M_0 é nulo. Com base nos valores obtidos anteriormente, têm-se os valores dos momentos fletores finais mostrados na Figura 4 nas seções transversais extremas das barras. Esses valores estão definidos em função do parâmetro γ_i de cada barra, sendo:

$\gamma_i \rightarrow$ coeficiente de distribuição de momento da barra *i*.

O *coeficiente de distribuição de momento* de uma barra com relação a um nó é a razão entre o coeficiente de rigidez à rotação da barra e o somatório dos coeficientes de rigidez à rotação de todas as barras que convergem no nó:

$$\gamma_i = \frac{K_i}{\sum K_i} \, . \qquad (1)$$

O somatório de todos os coeficientes de distribuição de momento de todas as barras adjacentes a um nó, com respeito a esse nó, é unitário:

$$\sum_i \gamma_i = 1\,. \qquad (2)$$

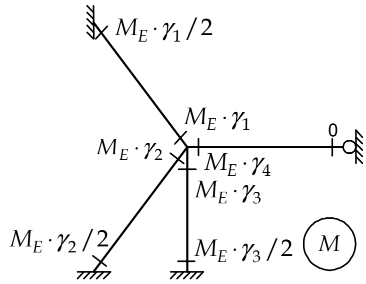


Figura 4 – Momentos fletores finais nas extremidades das barras da estrutura da Figura 2.

Na Figura 4, observa-se também que a distribuição do momento externo aplicado no nó acarreta momentos fletores nas outras extremidades das barras. O valor do momento fletor na outra extremidade é igual à metade do valor na extremidade adjacente ao nó equilibrado, para o caso de barra sem articulação, ou igual a zero, para o caso de barra articulada.

Define-se, então, o *coeficiente de transmissão de momento* da barra i:

$t_i = 1/2 \rightarrow$ coeficiente de transmissão de momento para barra com EI constante e sem articulação.

$t_i = 0 \rightarrow$ coeficiente de transmissão de momento para barra com extremidade oposta articulada.

Para o caso da barra sem articulação, o valor $1/2$ corresponde à relação entre os coeficientes de rigidez $2EI/l$ e $4EI/l$ devidos a uma rotação unitária imposta.

Conclui-se que *o momento externo M_E aplicado no nó é distribuído nas barras por momentos fletores nas seções transversais adjacentes ao nó, chamados de parcelas equilibrantes, que são proporcionais aos coeficientes de distribuição de momento no nó*:

$$M_i = M_E \cdot \gamma_i\,. \qquad (3)$$

Nas seções transversais das barras opostas ao nó, aparecem momentos fletores, chamados de parcelas transmitidas, que são iguais ao produto das parcelas equilibrantes pelo coeficiente de transmissão de momento de cada barra.

No caso de barras que têm seção transversal variável, os coeficientes de rigidez à rotação não correspondem aos valores $4EI/l$ ou $3EI/l$, assim como o coeficiente de transmissão de momento da barra sem articulação não é igual a $1/2$. Nesse caso, os parâmetros fundamentais para os coeficientes de rigidez à flexão de uma barra isolada devem ser utilizados:

$K_A \rightarrow$ coeficiente de rigidez à rotação na extremidade inicial da barra;

$t_{AB} \rightarrow$ coeficiente de transmissão de momento da extremidade inicial para a extremidade final;

$K_B \rightarrow$ coeficiente de rigidez à rotação na extremidade final da barra;

$t_{BA} \rightarrow$ coeficiente de transmissão de momento da extremidade final para a extremidade inicial.

3. Solução iterativa do sistema de equações de equilíbrio

Conforme apresentado na Seção 1, o método da distribuição de momentos é um processo iterativo de sucessivos passos de travamento de um nó e liberação de outro nó. Esta seção procura dar uma interpretação matemática para o processo, mostrando que constitui uma solução iterativa do sistema de equações de equilíbrio do método dos deslocamentos. Isso é demonstrado com o auxílio de um exemplo: uma viga contínua com três vãos, mostrada na Figura 5, e que tem uma inércia à flexão EI = 2.4x10^4 kNm^2. O primeiro apoio simples do 2º gênero está sendo interpretado como uma articulação na extremidade da barra, sendo que a rotação do nó do primeiro apoio não está sendo considerada como incógnita (Seções 4.2 e 4.3). Portanto, a viga só tem duas deslocabilidades, que são as rotações D_1 e D_2 das seções transversais dos dois apoios internos.

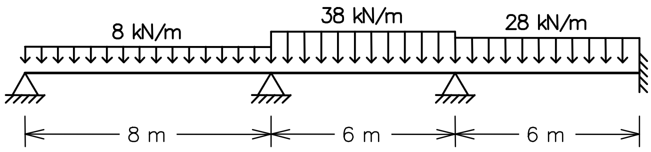


Figura 5 – Viga contínua com duas deslocabilidades.

A solução da viga da Figura 5 pelo método dos deslocamentos resulta no seguinte sistema de equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} (-64+114)+(3EI/8+4EI/6)\cdot D_1+(2EI/6)\cdot D_2=0 \\ (-114+84)+(2EI/6)\cdot D_1+(4EI/6+4EI/6)\cdot D_2=0 \end{cases}$$

Substituindo o valor fornecido para EI e passando os termos de carga para o lado direito do sinal de igual, tem-se:

$$\begin{cases} +25000\cdot D_1 \quad +8000\cdot D_2=-50 & (4) \\ \quad +8000\cdot D_1+32000\cdot D_2=+30 & (5) \end{cases}$$

A solução direta do sistema formado pelas Equações 4 e 5 resulta nos seguintes valores para as rotações D_1 e D_2:

$D_1=-2.5000\times10^{-3}\,\text{rad}$;

$D_2=+1.5625\times10^{-3}\,\text{rad}$.

Uma alternativa para a solução do sistema de equações de equilíbrio acima é uma solução iterativa do tipo Gauss-Seidel. Essa solução é o segundo ponto-chave para o método de distribuição de momentos (o primeiro é a distribuição de momentos em um nó mostrada na Seção 2). A solução iterativa é iniciada admitindo um valor nulo para D_2 e encontrando um valor para D_1 com base na Equação 4:

$$+25000\cdot D_1+8000\cdot(0)=-50 \quad\Rightarrow\quad D_1=-2.0000\times10^{-3}\,\text{rad}.$$

O segundo passo da solução iterativa consiste em utilizar esse valor encontrado para D_1 na Equação 5 para determinar um valor para D_2:

$$+8000\cdot(-2.0000\times10^{-3})+8000\cdot D_2=+30 \quad\Rightarrow\quad D_2=+1.4375\times10^{-3}\,\text{rad}.$$

No terceiro passo, a Equação 4 é utilizada novamente com o último valor obtido para D_2 para determinar um novo valor para D_1, resultando em:

$$+25000\cdot D_1+8000\cdot(+1.4375\times10^{-3})=-50 \quad\Rightarrow\quad D_1=-2.4600\times10^{-3}\,\text{rad}.$$

A Tabela 1 indica os resultados da solução iterativa após quatro ciclos completos de passagem pelo par de Equações 4 e 5. Os valores exatos da solução direta também estão mostrados na tabela. Pode-se verificar que os valores obtidos pela solução iterativa são bem próximos dos valores exatos. Na verdade, a solução exata sempre pode ser atingida, para um determinado grau de precisão desejado, bastando executar um número suficiente de ciclos.

Tabela 1 – Solução iterativa das Equações 4 e 5.

	D_1 [rad]	D_2 [rad]
Valores iniciais	–	0
Primeiro ciclo	$-2.0000\text{x}10^{-3}$	$+1.4375\text{x}10^{-3}$
Segundo ciclo	$-2.4600\text{x}10^{-3}$	$+1.5525\text{x}10^{-3}$
Terceiro ciclo	$-2.4968\text{x}10^{-3}$	$+1.5617\text{x}10^{-3}$
Quarto ciclo	$-2.4997\text{x}10^{-3}$	$+1.5624\text{x}10^{-3}$
Valores exatos	$-2.5000\text{x}10^{-3}$	$+1.5625\text{x}10^{-3}$

O processo de solução iterativa do sistema de equações de equilíbrio mostrado é uma interpretação matemática do experimento mostrado na Seção 1. Esse processo será ilustrado em seguida, com base na Figura 6.

Pode-se imaginar que a situação inicial, designada estágio 0, corresponde a uma configuração de engastamento dos nós interiores da viga contínua da Figura 5, isto é, com rotações fixadas com valores nulos. No estágio 1, ocorre uma liberação da rotação D_1, enquanto a rotação D_2 é mantida nula. Esse estágio corresponde ao resultado do primeiro passo da solução iterativa, resultando no primeiro valor encontrado para D_1. No estágio 2, a rotação D_1 é fixada com o valor obtido no estágio anterior, e a rotação D_2 é liberada exatamente como no segundo passo da solução iterativa. O estágio 3 corresponde a um congelamento da rotação D_2 com o valor obtido no estágio anterior e uma liberação da rotação D_1. No estágio 4, a rotação D_1 é fixada, e a rotação D_2 é liberada. Esse processo continua até atingir a convergência das rotações dos nós, que ocorre quando os incrementos de rotação dos nós são desprezíveis.

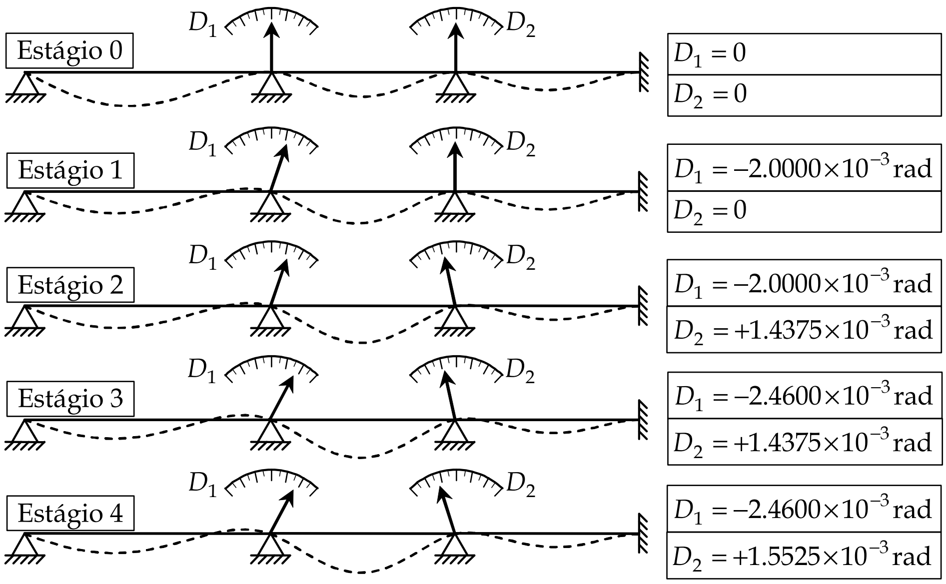


Figura 6 – Interpretação física da solução iterativa do sistema de equações de equilíbrio da viga da Figura 5 (configurações deformadas com fator de amplificação igual a 150).

Deve-se observar que, em cada estágio da solução iterativa mostrada na Figura 6, os momentos fletores nas barras da viga poderiam ser determinados com base nos valores correntes das rotações D_1 e D_2. Isso ocorre porque uma configuração deformada cinematicamente determinada define os esforços internos e externos em um modelo estrutural. Dessa forma, pode-se acompanhar a evolução da distribuição dos momentos fletores nas barras e o desequilíbrio de momentos fletores nos nós ao longo do processo.

A analogia da solução iterativa indicada na Figura 6 com o experimento mostrado na Seção 1 é evidente. Em cada estágio do processo iterativo, apenas um nó tem a rotação liberada. O nó liberado gira até atingir um estado de equilíbrio. O incremento de rotação está associado ao valor do desequilíbrio de momentos fletores no nó. Com o giro do nó, as barras adjacentes se deformam, ocorrendo uma redistribuição de momentos fletores nessas barras e afetando o equilíbrio do nó adjacente. No estágio seguinte, a rotação do nó liberado é fixada com o valor acumulado de rotação de todos os estágios anteriores. O equilíbrio de momentos fletores no nó fixado é alterado pela liberação da rotação do nó adjacente. O nó que tem a sua rotação fixada artificialmente só fica equilibrado com a aplicação de um momento externo. O processo iterativo continua até que a estrutura atinja uma situação de equilíbrio global, na qual não é necessário aplicar momentos externos nos nós interiores.

4. Formalização do processo de Cross

O método da distribuição de momentos pode ser visto como a junção de duas ideias apresentadas nas Seções 2 e 3. A solução do método segue a mesma linha do processo iterativo mostrado na seção anterior. A diferença é que as rotações não são calculadas em cada estágio do processo. Em vez disso, é feito um acompanhamento detalhado da evolução dos valores dos momentos fletores nas extremidades de todas as barras. Os valores dos momentos fletores nas barras são determinados em cada estágio com base na distribuição de parcelas equilibrantes, estudada na Seção 2.

Inicialmente, o processo de Cross é mostrado para uma estrutura que tem apenas um nó a equilibrar. Em seguida, na Seção 4.2, o processo é formalizado com auxílio da viga contínua estudada na Seção 3.

4.1. Processo de Cross para um pórtico com uma deslocabilidade

O processo de Cross é formulado nesta seção para um pórtico que só tem uma rotação nodal livre. O objetivo é mostrar que, utilizando o princípio básico de distribuição de momento externo aplicado a um nó, dado pela Equação 3, pode-se determinar diretamente os valores das parcelas equilibrantes de momentos fletores nas barras, sem ser necessário calcular a rotação do nó.

Considere o pórtico mostrado na Figura 7, que tem barras inextensíveis e rigidez à flexão EI constante para todas as barras. As barras estão numeradas conforme mostra a figura, sendo que a barra 1 tem uma articulação na base.

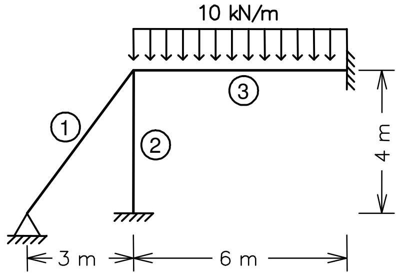


Figura 7 – Pórtico com uma deslocabilidade interna (Süssekind 1977-3).

Os coeficientes de rigidez à rotação das três barras do exemplo com relação ao nó central (nó que tem a deslocabilidade interna) são:

$K_1 = 3EI/5$, $K_2 = 4EI/4$ e $K_3 = 4EI/6$.

Utilizando a Equação 1, pode-se determinar os coeficientes de distribuição de momento das três barras no nó central:

$$\gamma_1 = \frac{K_1}{K_1 + K_2 + K_3} = 0.26,\ \gamma_2 = \frac{K_2}{K_1 + K_2 + K_3} = 0.44 \text{ e } \gamma_3 = \frac{K_3}{K_1 + K_2 + K_3} = 0.30.$$

A Figura 8 mostra o estágio inicial do processo de Cross para o pórtico estudado. A figura também indica os valores dos coeficientes de distribuição de momento das três barras com relação ao nó central. Nesse estágio, o nó tem a rotação fixada com valor nulo, isto é, o nó está completamente engastado. Nessa situação, as barras descarregadas não apresentam momentos fletores, e a barra carregada tem momentos fletores de engastamento perfeito. Observa-se que os momentos fletores nas seções transversais adjacentes ao nó central não estão equilibrados.

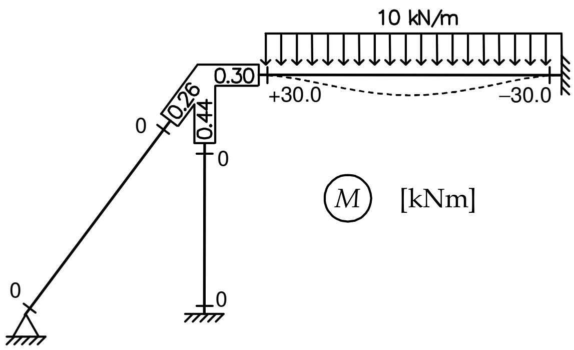


Figura 8 – Estágio inicial do processo de Cross para o pórtico da Figura 7.

No segundo estágio do processo, o nó central tem a rotação liberada (Figura 9). De acordo com o que foi visto na Seção 2, o momento total desequilibrante no nó (com valor de +30.0 kNm) é equilibrado por parcelas equilibrantes de momentos fletores nas três barras adjacentes ao nó.

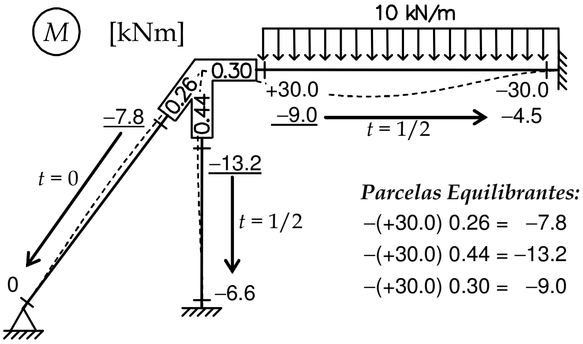


Figura 9 – Estágio final do processo de Cross para o pórtico da Figura 7.

As parcelas equilibrantes (indicadas na Figura 9) são proporcionais aos valores dos coeficientes de distribuição de momento e têm sentido contrário ao momento desequilibrante. O sentido contrário é indicado pelo sinal contrário das parcelas equilibrantes em relação ao momento desequilibrante, o que é consistente com a convenção de sinais adotada no processo de Cross, a mesma do método dos deslocamentos.

Também conforme visto na Seção 2, o equilíbrio do nó central acarreta um transporte de momentos fletores para os outros nós das barras. As parcelas transmitidas de momentos fletores são determinadas pelos coeficientes de transmissão de momento (t) indicados na Figura 9.

As parcelas equilibrantes e transmitidas de momentos fletores nas barras, que são obtidas no segundo estágio do processo, se acumulam aos momentos fletores do estágio inicial de engastamento perfeito. Esse acúmulo é consistente com o acúmulo de rotações nodais, que é uma característica do processo iterativo mostrado na Seção 3. Os valores finais acumulados de momentos fletores nas extremidades das barras do pórtico estudado são mostrados na Figura 10. O diagrama de momentos fletores, desenhado com ordenadas do lado da fibra tracionada, também está indicado na figura.

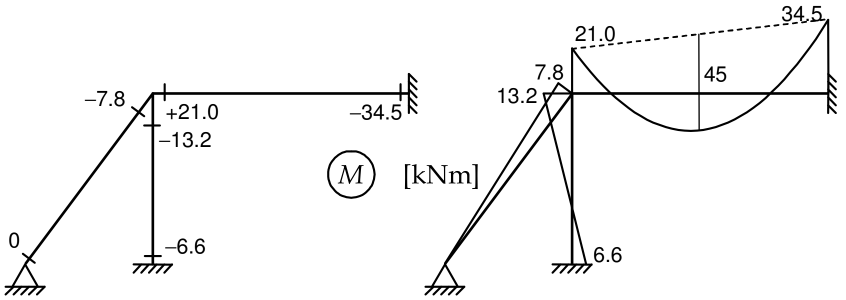


Figura 10 – Diagrama final de momentos fletores para o pórtico da Figura 7.

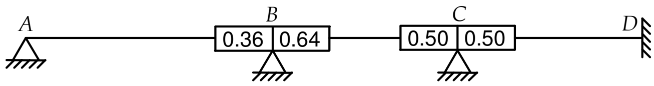
Pela análise do pórtico desta seção, observa-se que a aplicação do processo de Cross para uma estrutura com apenas uma deslocabilidade é muito simples. Os momentos fletores nas barras são determinados sem que seja necessário calcular rotações. Essa simplicidade é mantida para o caso de mais de uma deslocabilidade, conforme será visto em seguida.

4.2. Processo de Cross para uma viga com duas deslocabilidades

No exemplo da seção anterior, após o estágio inicial, é necessário apenas um passo para equilibrar o nó e terminar o processo iterativo. Isso ocorre porque só existe um nó a equilibrar. Quando a estrutura tem mais de uma deslocabilidade, isto é, quando tem mais de um nó a equilibrar, aplica-se a mesma metodologia de equilíbrio nodal baseado nos coeficientes de distribuição de momento. Nesse caso, entretanto, as parcelas transmitidas de momentos fletores no equilíbrio de um nó acarretam o desequilíbrio de nós adjacentes já equilibrados.

Portanto, para atingir a convergência final do processo, é necessário repetir ciclos de equilíbrio nodal até que as parcelas transmitidas sejam desprezíveis. Esse é justamente o processo iterativo que foi mostrado na Seção 3. A única diferença é que, no processo de Cross formalizado nesta seção, as rotações dos nós equilibrados não são calculadas. Em vez disso, os valores dos momentos fletores nas barras são determinados em cada estágio.

Para exemplificar a metodologia de cálculo do processo de Cross para estruturas com mais de uma deslocabilidade, será feita a análise da mesma viga contínua estudada na Seção 3 (Figura 5). A Figura 11 indica todos os estágios dessa solução. Apenas os dois nós interiores são equilibrados (a primeira barra é considerada articulada na extremidade esquerda). Adota-se uma precisão de 0.1 kNm para momentos fletores, isto é, uma casa decimal para representar os valores dos momentos fletores.



Estágio 0	0	–64.0	+114.0		–114.0	+84.0		–84.0
Estágio 1	0	–18.0	–32.0	→	–16.0			
Estágio 2	0		+11.5	←	+23.0	+23.0	→	+11.5
Estágio 3	0	–4.1	–7.4	→	–3.7			
Estágio 4	0		+0.9	←	+1.9	+1.8	→	+0.9
Estágio 5	0	–0.3	–0.6	→	–0.3			
Estágio 6	0		0	←	+0.1	+0.2	→	+0.1
Final	0	–86.4	+86.4		–109.0	+109.0		–71.5

Figura 11 – Processo de Cross para a viga contínua da Figura 5 (momentos em kNm).

Os coeficientes de distribuição de momento estão indicados em cada nó na Figura 11. Os cálculos desses coeficientes para o primeiro nó são:

$$\gamma_{BA} = \frac{3EI/8}{3EI/8 + 4EI/6} = 0.36 \text{ e } \gamma_{BC} = \frac{4EI/6}{3EI/8 + 4EI/6} = 0.64\,.$$

Para o segundo nó, tem-se:

$$\gamma_{CB} = \gamma_{CD} = \frac{4EI/6}{4EI/6 + 4EI/6} = 0.50\,.$$

O processo mostrado na Figura 11 inicia no estágio 0, que corresponde a uma situação de engastamento perfeito. Os valores dos momentos fletores iniciais nas barras são determinados com base na Figura 9.27. Observa-se que existe um desequilíbrio no primeiro nó de –64.0 + 114.0 = +50.0 kNm. O segundo nó tem um desequilíbrio de –114.0 + 84.0 = –30.0 kNm.

No estágio 1, o primeiro nó é equilibrado. No caso geral de uma estrutura com várias deslocabilidades, não existe uma ordem preferencial para o equilíbrio dos nós: qualquer nó desequilibrado pode ser o próximo a ser equilibrado. Entretanto, *o processo converge mais rapidamente se, em cada estágio, o nó que tiver o maior desequilíbrio em módulo naquele instante for o nó a ser equilibrado* (Süssekind 1977-3). O equilíbrio do primeiro nó resulta nas seguintes parcelas equilibrantes:

– (+50.0) · 0.36 = –18.0 kNm;
– (+50.0) · 0.64 = –32.0 kNm.

Conforme mostra a Figura 11, após o equilíbrio do nó, as parcelas equilibrantes são sublinhadas para indicar que os momentos fletores acima naquele nó estão em equilíbrio (somados resultam em um valor nulo). O equilíbrio desse nó não transmite momento fletor para a esquerda, pois a extremidade oposta da barra à esquerda é articulada. A parcela transmitida para a direita é igual à metade da parcela equilibrante ($t = 1/2$):

–32.0 · 1/2 = –16.0 kNm.

Essa parcela transmitida vai se somar ao momento fletor na seção transversal à esquerda do segundo nó. Como este ainda não foi equilibrado, o seu desequilíbrio total é:

–114.0 + 84.0 – 16.0 = –46.0 kNm.

No estágio 2, o equilíbrio do segundo nó resulta em parcelas equilibrantes iguais (estas aparecem sublinhadas na Figura 11):

–(–46.0) · 0.50 = +23.0 kNm.

As parcelas transmitidas nesse equilíbrio também são iguais:

+23.0 · 1/2 = +11.5 kNm.

A parcela transmitida para a direita vai para a seção transversal do engaste. A única consequência é que essa parcela se soma ao momento fletor inicial na seção do engaste (que absorve qualquer valor de momento fletor). A parcela transmitida para a esquerda, por sua vez, desequilibra o primeiro nó já equilibrado. Não há problema: basta começar um novo ciclo de equilíbrio nodal, iterando até convergir.

O desequilíbrio de +11.5 kNm no primeiro nó é resolvido no estágio 3. As parcelas equilibrantes são:

– (+11.5) · 0.36 = –4.1 kNm;
– (+11.5) · 0.64 = –7.4 kNm.

Esses valores são aproximados de maneira que, utilizando uma casa decimal, resultam em uma soma exatamente igual a –11.5 kNm, forçando, dessa forma, o equilíbrio de momentos fletores conforme a precisão desejada.

Observa-se que um procedimento semelhante é feito no estágio 4, que equilibra a parcela transmitida de –3.7 kNm. Os valores das parcelas equilibrantes de +1.9 kNm e +1.8 kNm foram obtidos de maneira a somar exatamente +3.7 kNm, mesmo que, em princípio, eles devessem ser iguais (os dois coeficientes de distribuição de momento no nó são iguais a 0.50). Com esse procedimento, os momentos fletores finais do processo satisfazem o equilíbrio com o número de casas decimais especificado para a precisão.

No estágio 4, as parcelas transmitidas para a esquerda e para a direita são iguais (+0.9 kNm). Como se está utilizando apenas uma casa decimal para representar os valores de momentos, o arredondamento da metade de +1.9 kNm poderia ser para cima ou para baixo. *Optou-se por arredondar para baixo porque isso faz o processo iterativo convergir mais rapidamente*. Observe que as diferenças de valores são muito pequenas (da ordem da precisão especificada).

No último estágio, o estágio 6, ocorre o mesmo que no estágio 4: as parcelas equilibrantes de +0.1 kNm e +0.2 kNm não são iguais, mas equilibram o momento desequilibrante de –0.3 kNm com uma casa decimal. Nesse estágio, a parcela transmitida para a esquerda (metade de +0.1 kNm) foi arredondada para um valor nulo a fim de que o primeiro nó permaneça em equilíbrio e o processo termine.

Deve-se observar que as parcelas transmitidas sempre decrescem em módulo, o que garante a convergência do processo iterativo. Isso se deve a dois motivos: primeiro, as parcelas equilibrantes decrescem em módulo em relação ao momento desequilibrante em cada nó, pois os coeficientes de distribuição de momento são no máximo iguais a uma unidade (em geral, menores que uma unidade); e, segundo, porque os coeficientes de transmissão de momento também são menores que uma unidade.

Os valores dos momentos fletores finais nas extremidades de todas as barras, mostrados no final da tabela da Figura 11, são determinados com base no acúmulo (soma com sinal) dos momentos fletores de todos os estágios do processo. A Figura 12 mostra o diagrama de momentos fletores na viga contínua, desenhado do lado da fibra tracionada.

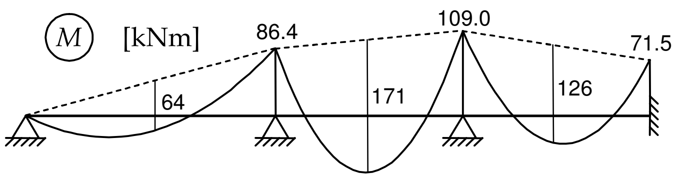


Figura 12 – Diagrama de momentos fletores da viga contínua da Figura 5.

5. Aplicação do processo de Cross a quadros planos

A metodologia do processo de Cross apresentada na seção anterior pode ser aplicada diretamente para pórticos planos indeslocáveis (sem translações nodais). Isso é exemplificado nesta seção com a solução do quadro plano mostrado na Figura 13. O objetivo dessa solução é obter o diagrama de momentos fletores do quadro pelo processo de Cross utilizando uma precisão de 1 KNm, isto é, sem nenhuma casa decimal. Todas as barras do pórtico são inextensíveis e têm a mesma inércia à flexão *EI* para todas as seções transversais.

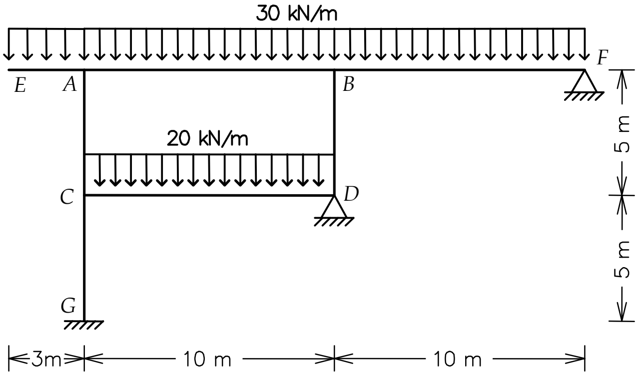


Figura 13 – Exemplo de pórtico plano para solução pelo processo de Cross.

O pórtico da Figura 13 só tem deslocabilidades internas (rotações nodais). As deslocabilidades do nó E não são consideradas, pois o nó corresponde a uma extremidade livre de balanço. A rotação do nó F não está sendo considerada como deslocabilidade, pois a barra superior da direita é interpretada com uma articulação no nó F (Seções 4.2 e 4.3). Dessa forma, o quadro tem quatro deslocabilidades internas, que são as rotações dos nós A, B, C e D.

A solução iterativa do processo de Cross do quadro da Figura 13 está mostrada na Figura 14, que indica os coeficientes de distribuição de momento de cada barra para cada nó a ser equilibrado. No nó A, somente as barras AB e AC são consideradas para a determinação dos coeficientes, pois a barra AE é um balanço (sem rigidez à rotação em relação ao nó A). Os cálculos dos coeficientes para esse nó são:

$$\gamma_{AB} = \frac{4EI/10}{4EI/10 + 4EI/5} = \frac{1}{3} \text{ e } \gamma_{AC} = \frac{4EI/5}{4EI/10 + 4EI/5} = \frac{2}{3}.$$

Para o nó B, os cálculos dos coeficientes são:

$$\gamma_{BA} = \frac{4EI/10}{4EI/10 + 3EI/10 + 4EI/5} = 0.27, \ \gamma_{BF} = \frac{3EI/10}{4EI/10 + 3EI/10 + 4EI/5} = 0.20 \text{ e}$$

$$\gamma_{BD} = \frac{4EI/5}{4EI/10 + 3EI/10 + 4EI/5} = 0.53.$$

No nó C, tem-se:

$$\gamma_{CA} = \gamma_{CG} = \frac{4EI/5}{4EI/5 + 4EI/10 + 4EI/5} = 0.40 \text{ e } \gamma_{CD} = \frac{4EI/10}{4EI/5 + 4EI/10 + 4EI/5} = 0.20.$$

Finalmente, os coeficientes de distribuição de momento para o nó D são:

$$\gamma_{DB} = \frac{4EI/5}{4EI/10 + 4EI/5} = \frac{2}{3} \text{ e } \gamma_{DC} = \frac{4EI/10}{4EI/10 + 4EI/5} = \frac{1}{3}.$$

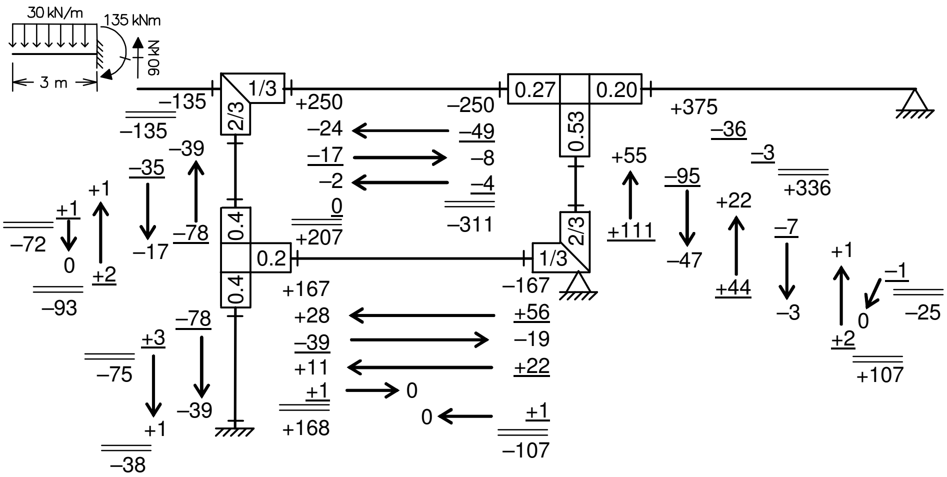


Figura 14 – Processo de Cross para o quadro plano da Figura 13 (momentos em kNm).

O processo de Cross mostrado na Figura 14 é iniciado com o cálculo dos momentos de engastamento perfeito das barras carregadas. Observa-se que os momentos fletores iniciais da barra *CD* são arredondados para a precisão desejada. O momento de engastamento no nó *A* da barra *EA* é calculado conforme indica o detalhe no canto superior esquerdo da Figura 14 (cálculo isostático de reações de engastamento de uma barra em balanço com uma carga uniformemente distribuída). O momento fletor dessa barra em *A* é negativo, pois atua na extremidade da barra no sentido horário.

Em cada passo do processo, procura-se equilibrar o nó que tem o maior momento desequilibrante em módulo. No estágio inicial, os nós *C* e *D* têm o valor máximo em módulo de momento desequilibrante e se optou por equilibrar o nó *D* (momento desequilibrante igual a –167 kNm) no primeiro passo. Considerando os coeficientes de distribuição de momento nesse nó, tem-se como parcelas equilibrantes +111 kNm, na barra *DB*, e +56 kNm, na barra *DC*. As parcelas transmitidas são +55 kNm (arredondada para baixo), para o nó *B*, e +28 kNm, para o nó *C*. No passo seguinte, o nó *C* é o que tem o maior momento desequilibrante em módulo (+167 + 28 = +195 kNm). O equilíbrio desse nó acarreta a transmissão de momentos para os nós *A* e *D* (este passa a ficar desequilibrado novamente). O próximo nó a ser equilibrado é o nó *B*, em seguida o nó *A*, e assim sucessivamente até que os momentos transmitidos sejam menores do que 1 kNm (a precisão desejada).

A Figura 14 mostra os momentos fletores finais nas extremidades de todas as barras. Os valores finais são calculados superpondo os valores dos momentos de todos os estágios do processo. O diagrama de momentos fletores finais desse exemplo é indicado na Figura 15.

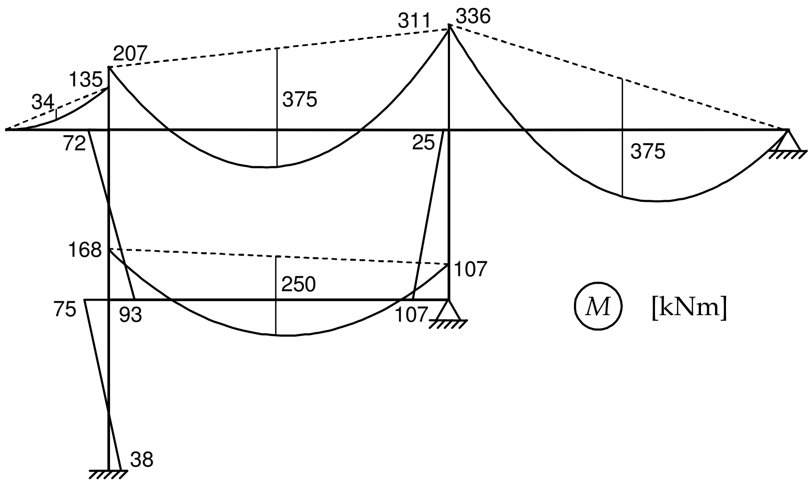


Figura 15 – Diagrama de momentos fletores do quadro plano da Figura 13.

6. Aplicação do processo de Cross a quadros com apoio elástico rotacional

Esta seção descreve, através de um exemplo, os procedimentos necessários para considerar apoios elásticos em uma análise de um pórtico plano pelo processo de Cross.

Um apoio elástico rotacional entra na distribuição de parcelas equilibrantes de momentos quando um nó é equilibrado em um estágio do processo. O coeficiente de distribuição de momento do apoio elástico, que define a sua parcela equilibrante, é calculado com base no seu coeficiente de rigidez rotacional. Isso é explicado para o pórtico mostrado na Figura 16, que tem dois apoios elásticos rotacionais.

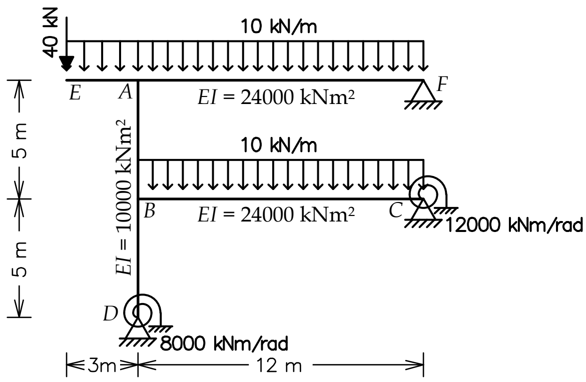


Figura 16 – Exemplo de pórtico plano com apoios elásticos rotacionais.

A Figura 16 indica os valores dos parâmetros de rigidez à flexão EI das barras do pórtico e os valores dos coeficientes de rigidez rotacional dos dois apoios elásticos. Observe que as barras horizontais são mais rígidas do que as verticais.

Nesse exemplo, os nós estão identificados por letras. Os nós equilibrados no processo de Cross são os internos, A e B, e os dos apoios elásticos, C e D. A determinação dos coeficientes de distribuição de momentos desses nós é indicada a seguir. Esse cálculo considera, para cada nó, o coeficiente de rigidez à rotação de uma barra ($4EI/l$ ou $3EI/l$, sendo l o comprimento da barra) e o coeficiente de rigidez rotacional (12000 kNm/rad ou 8000 kN/rad) de um apoio elástico.

Os coeficientes de distribuição de momentos do nó A são:

$$\gamma_{AB} = \frac{4 \cdot 10000/5}{4 \cdot 10000/5 + 3 \cdot 24000/12} = \frac{4}{7}\,;$$

$$\gamma_{AF} = \frac{3 \cdot 24000/12}{4 \cdot 10000/5 + 3 \cdot 24000/12} = \frac{3}{7}\,.$$

Para o nó B, tem-se os seguintes coeficientes de distribuição de momentos:

$$\gamma_{BA} = \gamma_{BD} = \frac{4 \cdot 10000/5}{4 \cdot 10000/5 + 4 \cdot 24000/12 + 4 \cdot 10000/5} = \frac{1}{3}\,;$$

$$\gamma_{BC} = \frac{4 \cdot 24000/12}{4 \cdot 10000/5 + 4 \cdot 24000/12 + 4 \cdot 10000/5} = \frac{1}{3}\,.$$

Abaixo estão os coeficientes de distribuição de momentos do nó C:

$$\gamma_{CB} = \frac{4 \cdot 24000/12}{4 \cdot 24000/12 + 12000} = 0.4\,;$$

$$\gamma_{C-mola} = \frac{12000}{4 \cdot 24000/12 + 12000} = 0.6\,.$$

Finalmente, os coeficientes de distribuição de momentos do nó D são:

$$\gamma_{DB} = \frac{4 \cdot 10000/5}{4 \cdot 10000/5 + 8000} = 0.5\,;$$

$$\gamma_{D-mola} = \frac{8000}{4 \cdot 10000/5 + 8000} = 0.5\,.$$

A solução do processo de Cross para o pórtico com apoios elásticos segue o procedimento-padrão descrito nas seções anteriores. Essa solução é mostrada na Figura 17, e a Figura 18 ilustra o diagrama de momentos fletores resultante.

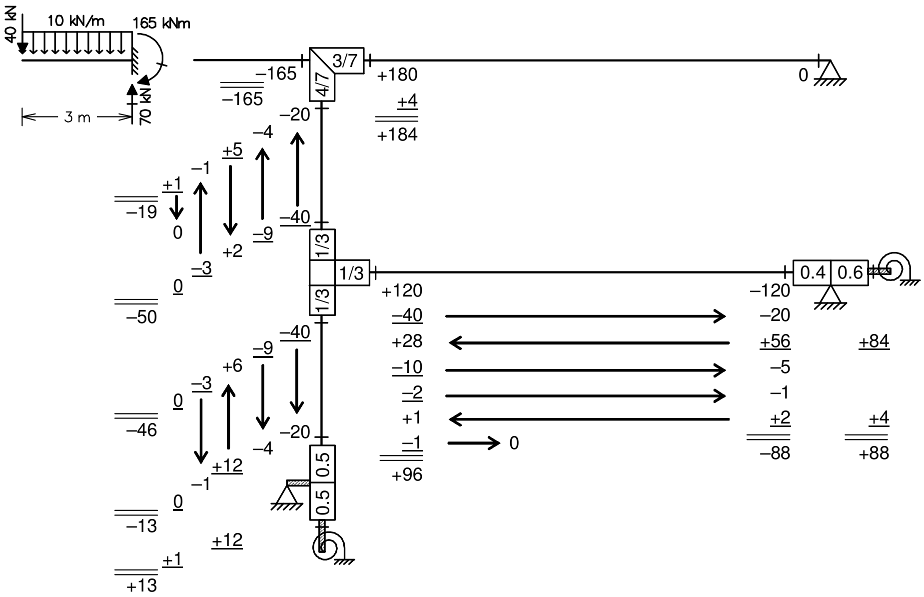


Figura 17 – Processo de Cross para o quadro plano da Figura 16 (momentos em kNm).

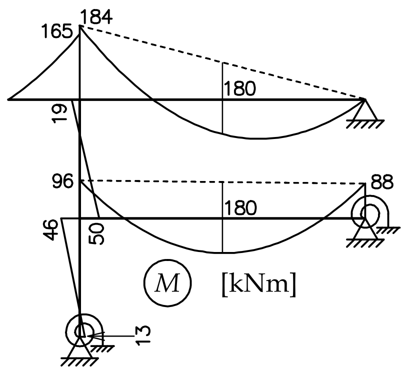


Figura 18 – Diagrama de momentos fletores do quadro plano da Figura 16.