

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro — PUC-Rio  
Departamento de Engenharia Civil

*O MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA SOB UM ENFOQUE MATRICIAL*

*Luiz Fernando Martha*

Rio de Janeiro, Agosto de 1993



## ÍNDICE

	Pág.
1. CONCEITOS BÁSICOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL .....	1
1.1. Sistemas de Coordenadas .....	2
1.1.1. Coordenadas Globais .....	2
1.1.2. Coordenadas Locais .....	5
1.2. Condições de Equilíbrio .....	6
1.3. Condições de Compatibilidade de Deslocamentos ...	7
1.3.1. Relações Entre Deslocamentos e Deformações em Barras .....	9
1.4. Relações Entre Tensões e Deformações .....	12
1.5. Superposição de Efeitos e Comportamento Linear ..	13
1.6. Estruturas Estaticamente Determinadas e Indetermi nadas .....	16
1.6.1. Estruturas Isostáticas .....	16
1.6.2. Estruturas Hiperestáticas .....	18
1.6.3. Comparação Entre Estruturas Isostáticas e Hiperestáticas .....	20
1.7. Métodos Básicos da Análise Estrutural .....	23
1.7.1. Método das Forças .....	24
1.7.2. Método dos Deslocamentos .....	24
1.7.3. Exemplo de Aplicação .....	24
1.8. Princípio dos Trabalhos Virtuais .....	29
1.8.1. Princípio dos Deslocamentos Virtuais .....	34
1.8.2. Princípio das Forças Virtuais .....	35

1.8.3. Teoremas de Reciprocidade .....	40
1.9. Matrizes de Rigidez .....	42
1.9.1. Matriz de Rigidez Global .....	43
1.9.2. Matriz de Rigidez Local .....	45
1.10. Representação dos Carregamentos Como Cargas Nodais	47
2. MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA PARA TRELIÇAS PLANAS .....	50
2.1. Matriz de Rigidez do Elemento (Barra) de Treliza no Sistema Local .....	51
2.1.1. Determinação por Aplicação de Equilíbrio Diretamente .....	52
2.1.2. Determinação de Matriz de Rigidez Local Por Aplicação do Princípio dos Deslocamen- tos Virtuais .....	54
2.2. Matriz de Rigidez do Elemento (Barra) de Treliza no Sistema de Eixos Globais .....	57
2.2.1. Determinação da Matriz a Partir de Trans- formações de Coordenadas .....	58
2.2.2. Determinação Por Aplicação das Condições de Equilíbrio Diretamente .....	61
2.3. Matriz de Rigidez Global .....	62
2.3.1. Método da Rigidez Direta .....	67
2.3.2. Formalização do Método da Rigidez Direta .	70
2.3.3. Instruções em FORTRAN Para Montagem da Ma- triz $\underline{K}$ .....	73
2.3.4. Numeração dos Nós Que Resulta na Matriz em Banda .....	78

2.4. Consideração das Condições de Contorno .....	82
2.4.1. Instruções em FORTRAN Para a Consideração das Condições de Apoio .....	85
2.5. Obtenção do Vetor de Cargas $\underline{F}$ .....	88
2.6. Determinação dos Deslocamentos .....	92
2.7. Esforços nas Barras .....	92
2.7.1. Determinação dos Esforços Utilizando a Ma triz de Rigidez $\underline{k}$ da barra .....	93
2.8. Reações de Apoio .....	96
3. MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA PARA QUADROS PLANOS .....	97
3.1. Matriz de Rigidez do Elemento (Barra) de Quadro no Sistema Local .....	97
3.1.1. Funções de Forma Para o Elemento de Viga .	99
3.1.2. Determinação da Matriz de Rigidez Por Apli cação do Princípio dos Deslocamentos Vir- tuais .....	102
3.2. Matriz de Rigidez do Elemento (Barra) de Quadro no Sistema de Eixos Globais .....	110
3.3. Determinação de Forças Equivalentes Nodais .....	113

4. INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS - ELEMENTO TRIANGULAR COM DEFORMAÇÃO CONSTANTE .....	118
4.1. Idéias Básicas .....	119
4.2. Equações Fundamentais da Teoria da Elasticidade	128
4.2.1. Relações Entre Deslocamentos e Deformações .....	129
4.2.2. Leis Constitutivas do Material - Relações Tensões x Deformações .....	130
4.2.3. Equações Diferenciais de Equilíbrio .....	133
4.3. Matriz de Rigidez do Elemento Finito Triangular de Deformação Constante .....	134
4.3.1. Matriz das Funções de Forma ( <u>N</u> ) .....	134
4.3.2. Matriz Que Relaciona Deformações Com Deslocamentos Nodais ( <u>B</u> ) .....	137
4.3.3. Tensões Dentro do Elemento .....	138
4.3.4. Determinação da Matriz de Rigidez Por Aplicação do Princípio dos Deslocamentos Virtuais .....	139
4.4. Resumo e Conclusões .....	143
5. REFERÊNCIAS .....	149

## 1. CONCEITOS BÁSICOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL

A análise estrutural é a fase do projeto estrutural que corresponde à determinação de esforços internos e externos (reações), e as correspondentes tensões, bem como determinação dos deslocamentos e correspondentes deformações da estrutura em estudo. Esta análise deve ser feita para os possíveis estágios de carregamentos e solicitações que devem ser previamente determinados.

O projeto estrutural tem como objetivo a concepção de uma estrutura que atenda a todas as necessidades para as quais ela será construída, satisfazendo segurança, condições locais, condições econômicas, estética, condições construtivas e restrições legais.

A análise estrutural está baseada na definição de um modelo estrutural onde o comportamento da estrutura é previsto para as diversas solicitações. O modelo estrutural é um modelo matemático que incorpora todas as hipóteses feitas para o comportamento da estrutura tais como hipóteses para o equilíbrio entre forças e entre tensões, para as relações entre deslocamentos e deformações, para o comportamento dos materiais que constituem a estrutura quando submetidas a solicitações, e para as condições de ligação da estrutura com outros sistemas (o solo por exemplo).

Estas hipóteses fundamentam as condições que governam o comportamento de um sistema estrutural representado por seu modelo matemático. Estas condições podem ser classificadas em:

- condições de equilíbrio
- condições de compatibilidade de deslocamentos
- relações entre tensões e deformações

Para estabelecer as condições acima e relacioná-las com um determinado modelo estrutural é essencial definir um sistema de coordenadas para identificar forças e deslocamentos.

## 1.1. Sistemas de Coordenadas

O modelo matemático utilizado inclui um sistema de coordenadas globais a nível de estrutura e um sistema de coordenadas locais a nível de elemento estrutural (uma barra de um quadro por exemplo) para definir forças e deslocamentos.

Convém observar que interpreta-se deslocamentos por deslocamentos e/ou rotações e forças por forças e/ou momentos.

Também é importante não confundir sistema de coordenadas com sistema de eixos. As coordenadas globais são em geral definidas segundo o sistema de eixos globais da estrutura como será visto e as coordenadas locais podem ser definidas tanto no sistema de eixos globais quanto em um sistema de eixos locais particular de um elemento estrutural.

### 1.1.1. Coordenadas Globais

Considere o quadro plano mostrado na figura 1.1

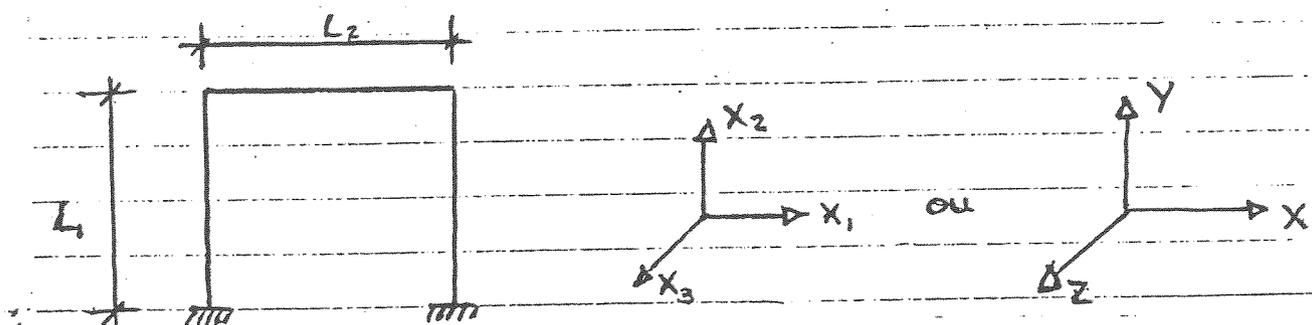


FIGURA 1.1 - Sistema de Eixos Globais

Em princípio não vamos considerar as condições de apoio da estrutura para definir as coordenadas globais mostradas na figura 1.2.

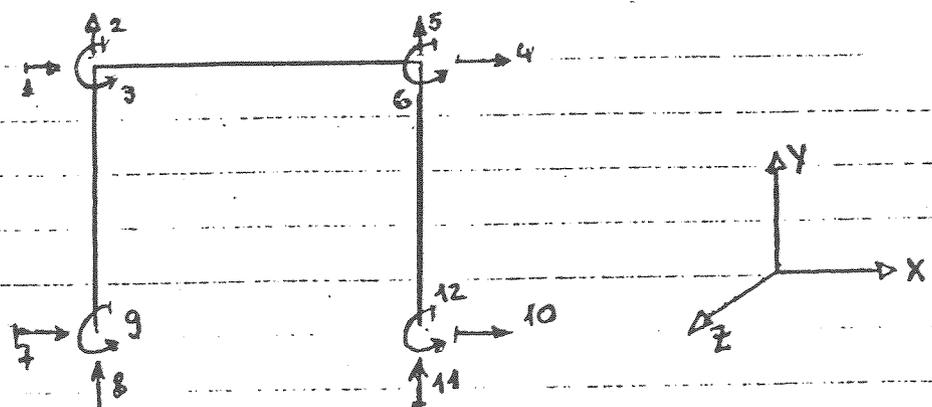


FIGURA 1.2. - Coordenadas Globais (Generalizados)

As coordenadas globais são usadas para descrever uma da da configuração deformada da estrutura, ou para descrever um gru po de forças aplicadas à estrutura.

Fica claro então que a descrição de deslocamentos da es trutura e forças aplicadas a ela fica limitada aos pontos onde são definidas as coordenadas. As informações quanto a deslocamen tos e forças em outros pontos são obtidos em função das informa ções nas coordenadas globais. O modelo matemático é feito de tal modo que se possa sempre reportar às coordenadas globais, por is so chamadas de coordenadas generalizadas.

Assim a configuração deformada da estrutura da figura 1.2 fica definida apenas pelos deslocamentos nas coordenadas glo bais descritos pelo vetor D formado por 12 componentes, sendo ca da componente  $D_i$  o deslocamento da coordenada  $i$ . Análogamente, o grupo de forças aplicadas a estrutura é descrito pelo vetor F formado pelas componentes  $F_i$ , cada uma aplicada à coordenada  $i$ . Os vetores D e F, mostrados abaixo, são chamados de deslocamen tos generalizados e forças generalizadas.

$$\underline{D} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

$$\underline{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

As componentes do vetor D são ditas linearmente inde pendente quando a configuração deformada da estrutura sõ fica completamente definida a partir do conhecimento de todas as com ponentes. As componentes do vetor F são ditas linearmente inde pendentes quando é preciso conhecer todos os componentes para de finir o grupo de forças aplicadas.

### 1.1.1.1. Coordenadas Dependentes

Voltemos à mesma estrutura da figura 1.2 e, ainda esquecendo as condições de apoio, consideremos que os membros da estrutura são infinitamente rígidos ao longo de suas direções axiais, de modo que seus comprimentos são invariáveis.

Neste caso podemos estabelecer as seguintes relações de dependências entre os deslocamentos das coordenadas globais:

$$\begin{aligned} D_1 &= D_4 \\ D_2 &= D_8 \\ D_5 &= D_{11} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Assim, a configuração deformada da estrutura fica definida por 9 componentes e não por 12, como mostrado na figura 1.3.

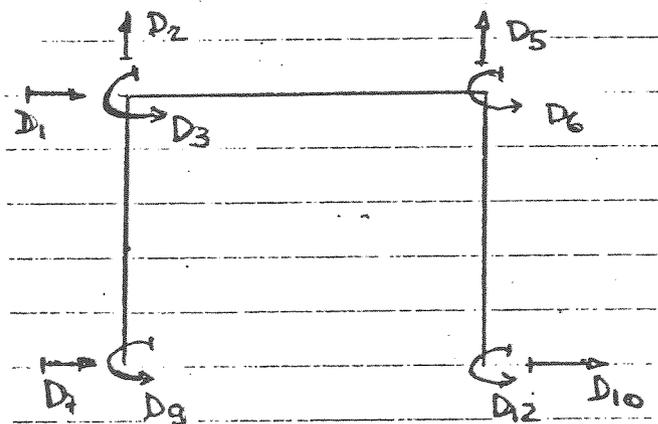


Figura 1.3 - Deslocamentos independentes

A dependência entre forças se dá para garantir o equilíbrio da estrutura como um todo. Para a estrutura da figura 1.2, as condições de equilíbrio nas direções X e Y e de momentos em relação ao ponto do apoio da esquerda resultam nas seguintes relações de dependências entre forças:

$$\begin{aligned} F_1 + F_4 + F_7 + F_{10} &= 0 \\ F_2 + F_5 + F_8 + F_{11} &= 0 \\ F_3 + F_6 + F_9 + F_{12} + F_1 L_1 + F_4 L_1 - F_5 L_2 - F_{11} L_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

### 1.1.2. Coordenadas Locais

Considere uma barra qualquer de um quadro como mostra do na figura 1.4. Na figura são mostrados os eixos globais da estrutura (XYZ) e as locais da barra (xyz).

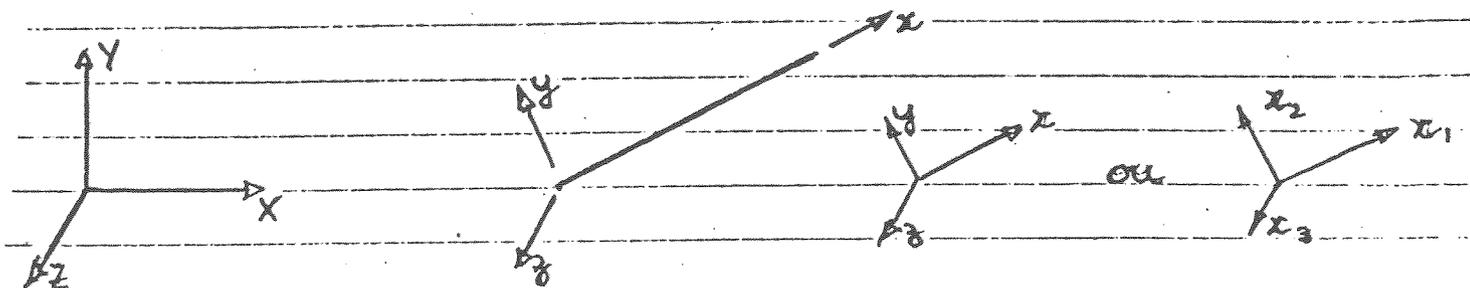


Figura 1.4 - Sistema de eixos locais

As coordenadas locais podem ser definidas no sistema global ou no sistema local, como mostrado na figura 1.5.

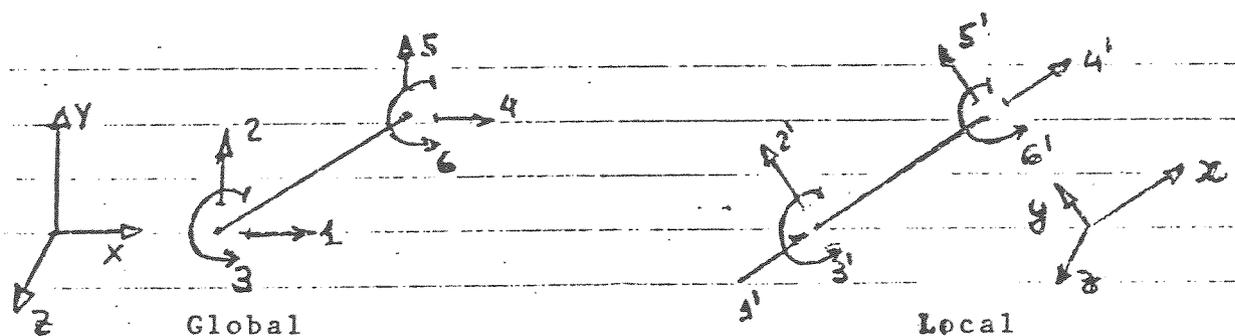


Figura 1.5 - Coordenadas Locais

O vetor  $\underline{d}$  define os deslocamentos das extremidades da barra no sistema de eixos globais e o vetor  $\underline{d}'$  define os deslocamentos no sistema de eixos locais. Os dois vetores são mostrados abaixo.

$$\underline{\underline{d}} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

$$\underline{\underline{d'}} = \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

Analogamente, os vetores  $\underline{\underline{f}}$  e  $\underline{\underline{f'}}$  definem as forças que atuam nas extremidades da barra segundo os sistemas de eixos globais e locais respectivamente e são mostrados abaixo.

$$\underline{\underline{f}} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

$$\underline{\underline{f'}} = \begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

As forças escritas no sistema de eixos locais são convenientes, neste caso da barra de um quadro, pois se identificam com esforço normal, esforço cortante e momento fletor nas extremidades.

A transformação dos vetores  $\underline{\underline{d'}}$  e  $\underline{\underline{f'}}$  do sistema local para  $\underline{\underline{d}}$  e  $\underline{\underline{f}}$  no sistema global, e vice-versa, será vista mais tarde.

## 1.2. Condições de Equilíbrio

Todas as estruturas devem ser capazes de alcançar um estado de equilíbrio estável para um determinado carregamento aplicado. Esta condição de equilíbrio deve ser satisfeita pela estrutura como um todo ou por qualquer porção isolada.

Para uma estrutura espacial as condições de equilíbrio global resultam em 6 equações de equilíbrio impondo que as resultantes de força e momento sejam nulas:

$$\begin{array}{lll}
 \Sigma F_x = 0 & \Sigma F_y = 0 & \Sigma F_z = 0 \\
 \Sigma M_x = 0 & \Sigma M_y = 0 & \Sigma M_z = 0
 \end{array} \quad (1.9)$$

O nosso modelo matemático utiliza a condição de equilíbrio aplicada às coordenadas globais. Assim, a resultante de força aplicada na direção de cada coordenada global é imposta ser nula. No caso da estrutura da figura 1.2 isto resultaria em 12 equações de equilíbrio.

Desta forma estaremos garantindo o equilíbrio dos pontos onde são definidas as coordenadas globais. Estes pontos são chamados de nós. Garantindo-se o equilíbrio de todos os nós da estrutura, garante-se o equilíbrio da estrutura como um todo, ou de qualquer porção isolada.

Nos casos tratados, sempre escreveremos as equações de equilíbrio para a geometria indeformada da estrutura. Os motivos disto serão vistos no item 1.5.

### 1.3. Condições de Compatibilidade de Deslocamentos

Compatibilidade de deslocamento (e/ou rotações) é um importante conceito da análise estrutural. Ela expressa a exigência de que todas as partes da estrutura deformada devem permanecer ajustadas, unidas, ligadas, durante todos os estágios de carregamento.

Compatibilidade significa que os deslocamentos e deformações das várias partes da estrutura são consistentes.

No caso dos elementos estruturais constituídos por barras a hipótese de deformação da barra mantendo a seção transversal plana, adotada no nosso modelo matemático, implica na existência de compatibilidade no interior das mesmas. As relações entre deslocamentos e deformações, provenientes de tal hipótese, para efeitos axiais, de flexão e de torção são mostrados no item 1.3.1 a seguir.

Assim deve-se garantir a compatibilidade nas junções das barras e desta forma garante-se a compatibilidade no interior de

toda a estrutura.

Para exemplificar as relações que garantem a compatibilidade nodal vamos considerar a estrutura da figura 1.2. As coordenadas globais e locais estão mostradas na figura 1.6.

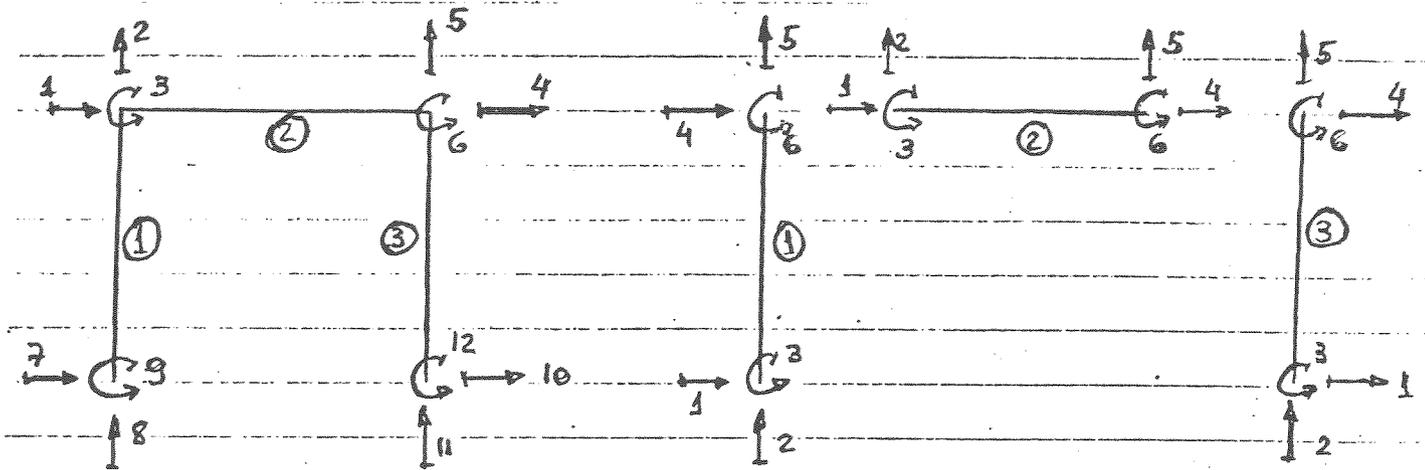


Figura 1.6 - Coordenadas Globais e Locais

As condições de compatibilidade nas junções (nós) das barras podem ser expressas por:

$$\begin{aligned}
 d_4^1 &= d_1^2 = D_1 \\
 d_5^1 &= d_2^2 = D_2 \\
 d_6^1 &= d_3^2 = D_3 \\
 d_4^2 &= d_4^3 = D_4 \\
 d_5^2 &= d_5^3 = D_5 \\
 d_6^2 &= d_6^3 = D_6
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

Estas condições partem do princípio que as junções entre as barras são totalmente rígidas, isto é, tanto deslocamentos quanto rotação são iguais nas duas extremidades da junta.

Estas condições são chamadas de condições de compatibilidade de deslocamentos interna à estrutura.

Além das condições de compatibilidade interna, os deslocamentos também devem ser compatíveis com as condições de apoio

da estrutura. Estas seriam condições de compatibilidade de deslocamentos externas. No caso da estrutura das figuras 1.1 e 1.2 tais condições resultariam em:

$$\begin{aligned}
 d_1^1 &= D_7 = 0 \\
 d_2^1 &= D_8 = 0 \\
 d_3^3 &= D_9 = 0 \\
 d_1^3 &= D_{10} = 0 \\
 d_2^3 &= D_{11} = 0 \\
 d_3^3 &= D_{12} = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

### 1.3.1. Relações entre Deslocamentos e Deformações em barras

Estas relações garantem a compatibilidade no interior das barras.

Vamos considerar uma barra definida segundo seu sistema de eixos locais como mostra a figura 1.7.

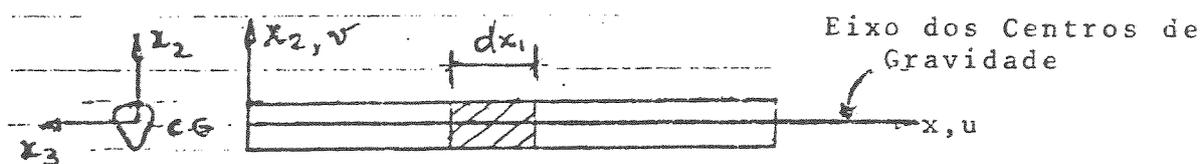


Figura 1.7 - Barra, Eixos Locais e Deslocamentos

Vamos definir as seguintes entidades:

- $u(x_1)$  = deslocamento do eixo da barra na direção axial  $x_1$
- $v(x_1)$  = deslocamento do eixo da barra na direção transversal  $x_1$
- $\theta_z(x_1)$  = rotação do eixo em torno do eixo  $x_3$ ;  $\theta_z = \frac{dv}{dx_1}$
- $k_z(x_1)$  = curvatura;  $k_z = \frac{d^2v}{dx_1^2}$  (aproximado)
- $\varphi(x_1)$  = rotação em torno do eixo  $x_1$  (torção)

### 1.3.1.1. Deformação Axial

Define-se deformação axial,  $\epsilon_a$ , às deformações normais à seção transversal provocadas por efeitos axiais. A expressão para  $\epsilon_a$  é tirada com auxílio da figura 1.8.

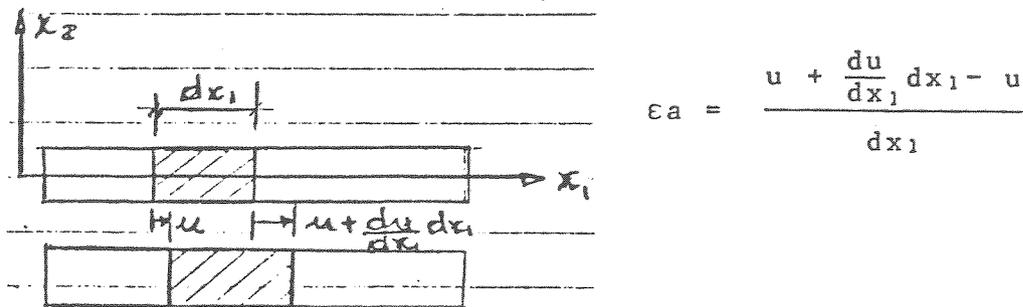


Figura 1.8 - Deformação Axial

Assim,

$$\epsilon_a = \frac{du}{dx_1} \quad (1.12)$$

### 1.3.1.2. Deformação por Flexão

Embora seja possível considerar, nós estamos desprezando o efeito de deformações por cisalhamento na definição do deslocamento transversal  $v$ . A deformação normal à seção transversal provocada por flexão é chamada  $\epsilon_f$ . A relação entre  $\epsilon_f$  e o deslocamento  $v$  é obtida analisando-se a variação de comprimento de uma fibra genérica como mostra a figura 1.9. Considere válida a hipótese de deformação mantendo a seção transversal plana.

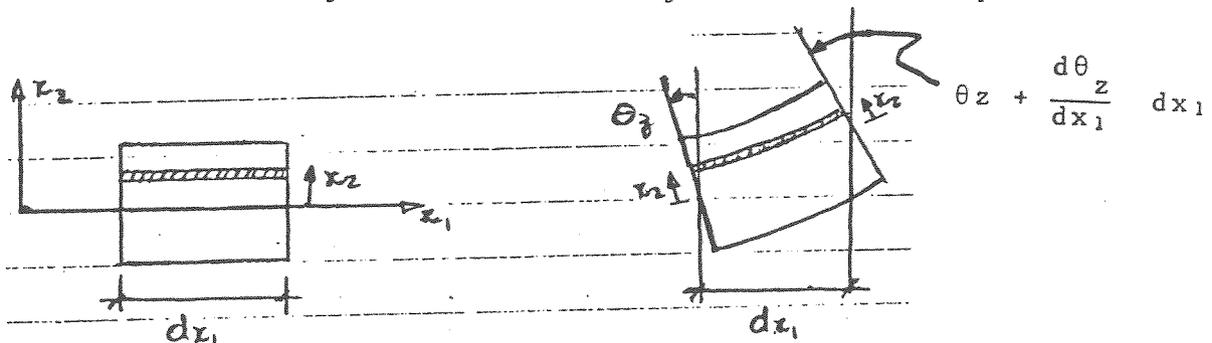


Figura 1.9 - Deformação por Flexão

Sendo  $dx_1$ , o comprimento inicial da fibra, o comprimento final  $\tilde{e}$  dado por:

$$dx_1 + \Theta z \cdot x_2 - \left( \Theta z + \frac{d\Theta z}{dx_1} dx_1 \right) \cdot x_2$$

Observe que para uma rotação  $\Theta z$  e sua derivada positivas temos um encurtamento de uma fibra definida por  $x_2$  positivo. Temos, então:

$$\epsilon_f = \frac{dx_1 + \Theta z \cdot x_2 - \left( \Theta z + \frac{d\Theta z}{dx_1} dx_1 \right) \cdot x_2 - dx_1}{dx_1}$$

$$\epsilon_f = \frac{-d^2 v}{dx_1^2} \cdot x_2 \quad (1.13)$$

### 1.3.1.3. Distorção por Torção

A relação entre a rotação por torção e a correspondente distorção é deduzida para seções transversais circulares onde não há o empenamento da seção, isto é, é válida a hipótese das seções planas. Para seções transversais não circulares, onde ocorre o empenamento quando solicitada à torção, a distorção não depende somente do giro mútuo das seções mas também depende de distorções locais. Neste caso continua-se assumindo válida a hipótese de seções planas, mas a inércia a torção considerada não é igual ao momento polar de inércia como o é no caso de seção circular.

A relação entre as distorções  $\gamma$  e as rotações por torção  $\varphi$  é definida como indica a figura 1.10.

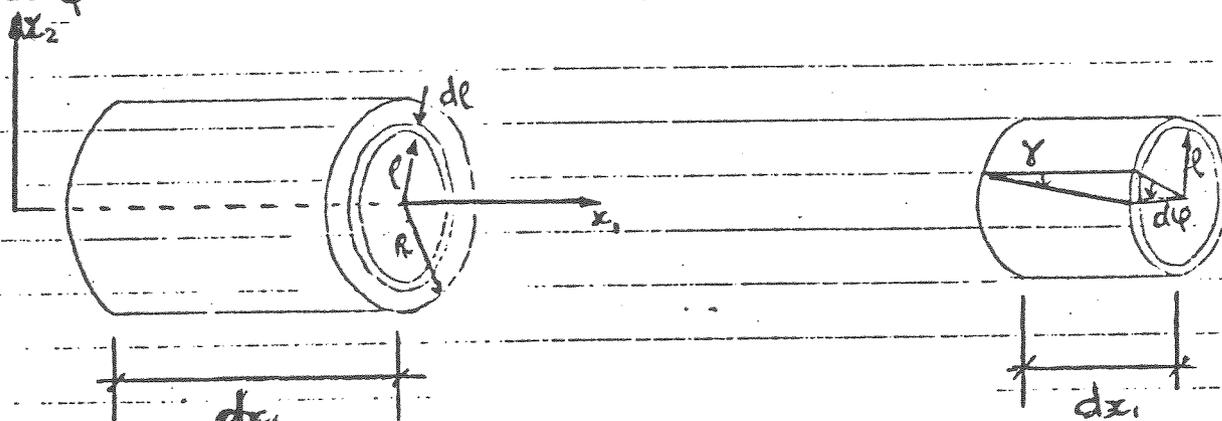


FIGURA 1.10 - Distorção Por Torção

Pela figura 1.10 vemos que:

$$\gamma dx_1 = \rho d\varphi$$

Sendo  $d\varphi$  a rotação por torção relativa entre duas seções distantes de um  $dx_1$ . Assim, temos:

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx_1} \quad (1.14)$$

#### 1.4. Relações entre Tensões e Deformações

O modelo matemático requer que o comportamento do material (ou materiais) que a estrutura é construída seja especificado a partir das relações entre tensões e deformações.

Estas relações são determinadas experimentalmente ou tomadas como conhecidas a partir de problemas já conhecidos.

Nos casos que iremos tratar consideraremos que o material tem um comportamento linear, isto é, segue a lei de Hooke.

As relações que compõem a lei de Hooke no caso plano são mostradas no item 6.2.2. Para o caso de treliças e quadros planos, onde consideraremos o efeito das tensões normais à seção transversal (hipótese simplificadora de resistência dos materiais) podemos escrever:

$$\sigma_{x_1} = E \epsilon_{x_1} \quad (1.15)$$

Sendo

$\sigma_{x_1}$  = tensão normal à seção transversal

$E$  = módulo de elasticidade do material

$\epsilon_{x_1}$  = deformação normal por efeito axial e/ou flexão

Para grelhas e quadros espaciais, além da tensão normal, temos a tensão de cisalhamento devida à torção (embora exista tensões de cisalhamento devido ao esforço cortante, seu efeito é desprezado):

$$\tau = G\gamma \quad (1.16)$$

Sendo

$\tau$  = tensão de cisalhamento

$G$  = módulo de elasticidade transversal ou módulo de cisalhamento

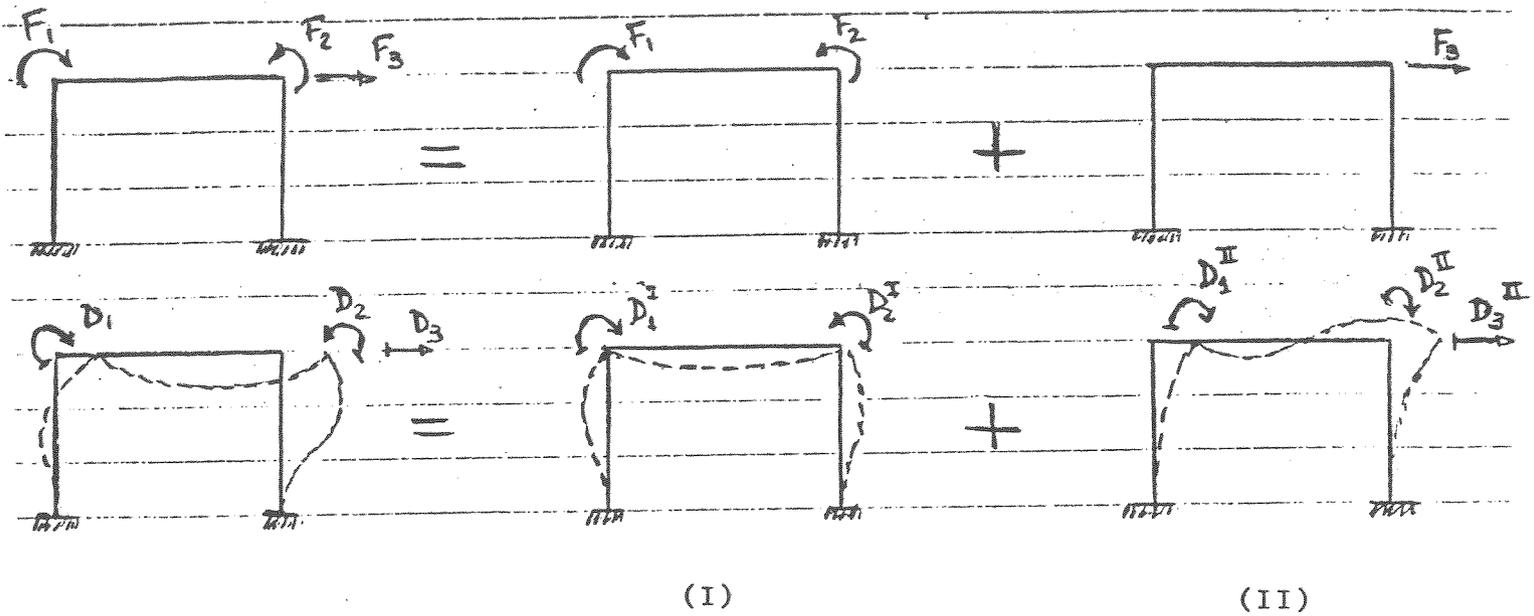
$\gamma$  = distorção

As relações tensões-deformações vão ser reportadas ao sistema de coordenadas. Isto é, destas relações a nível de infinitésimo chegaremos às relações entre forças e deslocamentos nos sistemas de coordenadas, primeiro no local e depois no global. Estas últimas relações definem as matrizes de rigidez mostradas no item 1.9.

#### 1.5. Superposição de Efeitos e Comportamento Linear

Em todos os métodos básicos da análise estrutural será necessário ter como hipótese que é válido o princípio da superposição de efeitos. Este princípio prescreve que todos os deslocamentos resultantes de um número de sistemas de forças podem ser somados para dar o deslocamento resultante da soma de todos os sistemas de forças. Superposição também implica no inverso: as forças correspondentes de um número de deslocamentos podem ser somadas para dar a força correspondente à soma dos deslocamentos.

O princípio da superposição é mostrado esquematicamente para o quadro da figura 1.11, onde as barras são consideradas inextensíveis.



$$\underline{F} = \begin{Bmatrix} -F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad \underline{D} = \begin{Bmatrix} -D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} \quad \underline{F}^I = \begin{Bmatrix} -F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \underline{D}^I = \begin{Bmatrix} -D_1^I \\ D_2^I \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \underline{F}^{II} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad \underline{D}^{II} = \begin{Bmatrix} -D_1^{II} \\ -D_2^{II} \\ D_3^{II} \end{Bmatrix}$$

$$|-F_1| = |F_2|$$

$$\underline{F} = \underline{F}^I + \underline{F}^{II} \rightarrow \underline{D} = \underline{D}^I + \underline{D}^{II} \rightarrow \begin{Bmatrix} -D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -D_1^I \\ D_2^I \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -D_1^{II} \\ -D_2^{II} \\ D_3^{II} \end{Bmatrix}$$

Figura 1.11 - Princípio da Superposição de Efeitos

Para que se possa utilizar o princípio da superposição de efeitos é necessário que a estrutura tenha um comportamento linear. O comportamento linear de uma estrutura baseia-se em duas condições. A primeira é que o material seja linear, e portanto elástico. Materiais não-elásticos sempre levam a comportamento não linear. A segunda condição é que os deslocamentos sejam "pequenos" para os carregamentos aplicados. Deslocamentos são pequenos quando as equações de equilíbrio escritas na forma indeformada da estrutura fornecem resultados iguais àqueles obtidos pelas mesmas equações de equilíbrio escritas na forma final de formada da estrutura para o carregamento correspondente.

A hipótese de pequenos deslocamentos poderia ser resu

mida em: "Deslocamentos são pequenos quando a geometria inicial ou final são iguais em termos práticos". Exceto em casos particulares, as estruturas civis tem deslocamentos pequenos face ao tamanho dos seus membros. Um exemplo destas exceções é o da estrutura da figura 1.12, onde o estado de equilíbrio estável só pode ser alcançado a partir da forma deformada da estrutura. Outro exemplo seria o dos cabos, que são estruturas muito flexíveis.

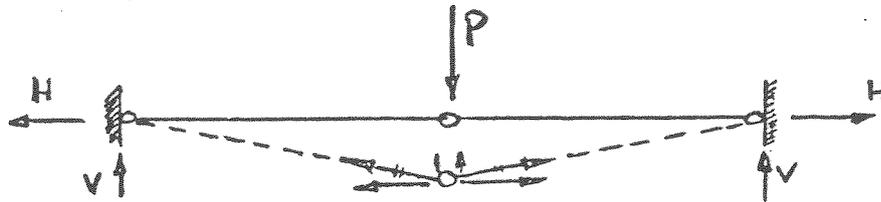


Figura 1.12 - Grandes Deslocamentos

A dependência do comportamento linear com a hipótese dos pequenos deslocamentos pode ser entendida a partir do exemplo da figura 1.13.

Nesta estrutura, o deslocamento vertical do ponto A,  $\delta_a$ , é função das características geométricas das barras, assim como das forças P e H e do comportamento do material que é suposto linear.

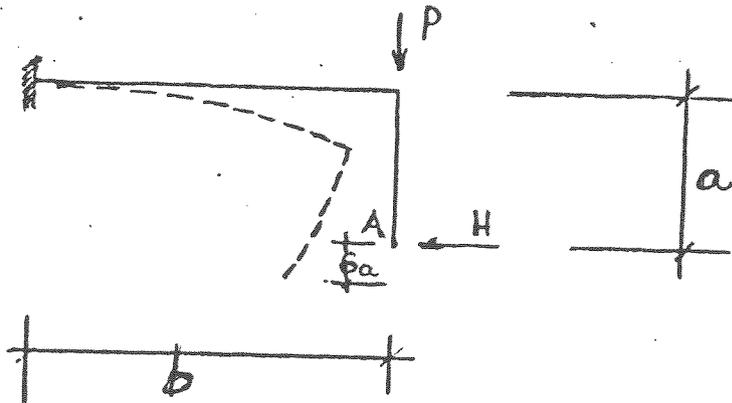


Figura 1.13 - Pequenos Deslocamentos

Podemos ter duas situações:

- 1º- Se  $\delta a$  for muito menor do que a ( $\delta a \ll a$ )  
e  $\delta a$  for muito menor do que b ( $\delta a \ll b$ )

Podemos considerar que  $\delta a$  depende das dimensões iniciais da estrutura, ou  $\delta a = \delta a(a, b)$ .

Como o material é linear, temos que  $\delta a$  é função linear de P, ou  $\delta a = C.P$ , onde C é uma constante.

2º- No entanto, se  $\delta a$  não for pequeno em relação a a e b, a dependência de  $\delta a$  com as dimensões da estrutura pode ser expressa por  $\delta a = \delta a(a + \delta a, b)$ . Isto mostra que o conhecimento do deslocamento  $\delta a$  dependerá do seu próprio valor que não é conhecido a priori. Isto faz com que  $\delta a$  não seja mais função linear de P.

A determinação de  $\delta a$  só pode ser resolvida iterativamente, partindo-se de um valor inicial suposto e determinando o valor correspondente, e assim por diante até que o valor determinado não difira significativamente do valor do passo anterior. Este processo pode não convergir, e neste caso a estrutura é instável. Assim sendo sempre trabalharemos com a hipótese de pequenos deslocamentos, onde as equações de equilíbrio são sempre escritas para a forma indeformada da estrutura.

Esta hipótese também é chamada de "hipótese da manutenção das dimensões iniciais", básica, juntamente com o comportamento linear do material, para a utilização do princípio da superposição de efeitos.

## 1.6. Estruturas Estaticamente Determinadas e Indeterminadas

As estruturas estáveis podem ser divididas em dois tipos: as estaticamente determinadas e as estaticamente indeterminadas, que são, respectivamente, chamadas de estruturas isostáticas e estruturas hiperestáticas.

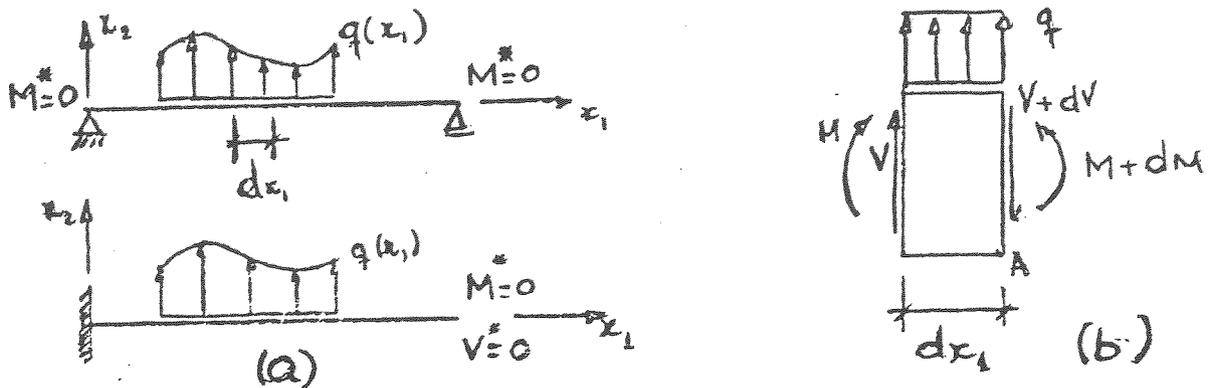
### 1.6.1. Estruturas Isostáticas

São tais que tanto forças externas desconhecidas (reações de apoio) como internas (esforços simples) são determinados para qualquer caso de carregamento com a utilização apenas das

condições de equilíbrio.

Do ponto de vista físico, uma estrutura isostática tem o número estrito de vínculos (externos e internos) para que permaneça estável. Retirando um destes vínculos a estrutura se torna instável (hipostática), e adicionando-se um vínculo qualquer a mais, este não seria o necessário para dar estabilidade à estrutura, e ela se torna hiperestática.

Tomemos por exemplo as vigas mostradas na figura 1.14.



\* Condições de contorno em termos de forças

Figura 1.14 - Vigas Isostáticas

A análise do equilíbrio do elemento infinitesimal de viga (figura 1.14 - b) fornece as seguintes relações:

$$\sum F_{x_1} = 0 \dots\dots\dots \frac{dV}{dx_1} = q(x_1) \quad (1.17)$$

$$\sum M_A = 0 \text{ (desprezando os termos de ordem superior)} \dots\dots \frac{dM}{dx_1} = V \quad (1.18)$$

Substituindo a expressão (1.18) na expressão (1.17) obtemos a equação diferencial que estabelece as condições de equilíbrio do elemento infinitesimal:

$$\frac{d^2M}{dx_1^2} = q(x_1) \quad (1.19)$$

Esta equação integrada ao longo da viga fornece:

$$M(x_1) = \iint q \, dx_1 \, dx_1 + C_1 x_1 + C_2 \quad (1.20)$$

As constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$  ficam definidas pelas condições de contorno em termos de forças.

Pela figura 1.14, vemos que as vigas isotáticas sempre definem duas condições de contorno em força, sendo possível de terminar  $C_1$  e  $C_2$ . Com  $C_1$  e  $C_2$  podemos determinar os momentos fletores a partir da expressão (1.20) e os esforços cortantes a partir da expressão (1.18).

Concluimos então que para estruturas isostáticas só o carregamento, juntamente com as condições de contorno em termos de força, já define os esforços internos na estrutura utilizando apenas condições de equilíbrio.

### 1.6.2. Estruturas Hiperestáticas

São tais que as equações de equilíbrio não são suficientes para a determinação das forças internas e/ou externas (reações). São necessárias condições de compatibilidade de deslocamentos para a definição destes esforços.

Do ponto de vista físico, uma estrutura hiperestática tem mais vínculos (externos ou internos) do que os necessários para que ela seja estável. Retirando um destes vínculos a estrutura ainda é estável.

Tomemos por exemplo as vigas da figura 1.15. Não existem condições de contorno em termos de forças para determinarmos os momentos fletores pela expressão (1.20). Existem quatro condições de contorno que envolvem deslocamento vertical,  $v$ , e rotação,  $\frac{dv}{dx_1}$ .

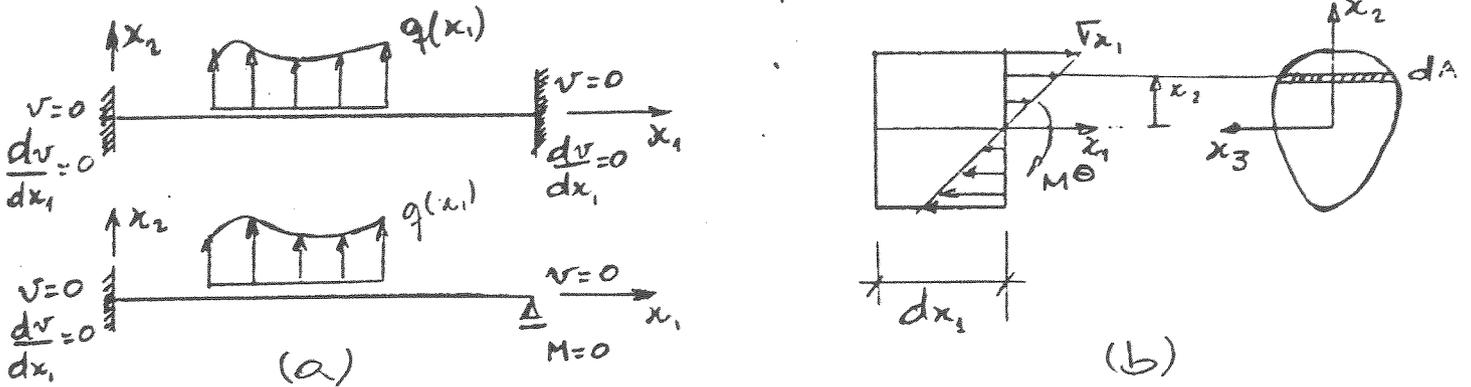


Figura 1.15 - Vigas Hiperestáticas

Para resolvermos as vigas hiperestáticas temos que utilizar a condição de compatibilidade de deslocamentos dada pela expressão (1.13). Com esta expressão e a relação tensão-deformação da expressão (1.15) podemos relacionar momentos fletores com deslocamentos. Pela figura 1.15-b tiramos que (observe que uma tensão positiva para  $x_2$  positivo provoca momento negativo):

$$M(x_1) = \int_A -\sigma x_1 \cdot x_2 \cdot dA \quad (1.21)$$

Substituindo (1.13) e (1.15) em (1.21) chega-se a:

$$M(x_1) = \frac{d^2 v}{dx_1^2} \cdot E \cdot \int_A x_2^2 dA \quad (1.22)$$

Ou ainda, 
$$\frac{d^2 v}{dx_1^2} = \frac{M}{EI}$$

Onde:

$$\frac{d^2 v}{dx_1^2} = \text{curvatura}$$

$I = I_{x_3}$  = momento de inércia em torno do eixo  $x_3$

A expressão (1.22) estabelece uma relação que garante compatibilidade de deslocamentos (hipótese das seções planas) e relações tensões-deformações.

Para resolvermos as vigas hiperestáticas resta considerar a condição de equilíbrio dada pela expressão (1.19). Substituindo (1.22) em (1.19) obtemos a equação diferencial fundamental das vigas, relacionando deslocamento com carregamento:

$$\frac{d^2}{dx_1^2} \left[ EI \frac{d^2 v}{dx_1^2} \right] = q(x_1) \text{ ou, para } I \text{ constante, } EI \frac{d^4 v}{dx_1^4} = q(x_1) \quad (1.23)$$

Integrando esta equação obtemos quatro constantes de integração que ficam definidas pelas quatro condições de contorno das vigas hiperestáticas da figura 1.15. Os esforços internos são determinados pelas expressões (1.22) e (1.18).

Concluimos que a determinação de esforços em estruturas hiperestáticas requer a utilização tanto das condições de equilíbrio quanto de compatibilidade de deslocamento interna e com os vínculos externos.

### 1.6.3. Comparação entre Estruturas Isostáticas e Hiperestáticas

Nas estruturas isostáticas só o carregamento já define os esforços internos. Por isso só existe uma solução para estes esforços para cada caso de carregamento.

Pode-se observar também que pequenas variações na geometria da estrutura (dentro da hipótese de pequenos deslocamentos), por não alterarem as equações de equilíbrio, não introduzem esforços adicionais em estruturas isostáticas.

Assim deformações provenientes de variações de temperatura produzem deslocamentos sem produzir esforços. O que pode ser entendido mais facilmente se for observado que a estrutura isostática tem o número estrito de vínculos para impedir seus mo

vimentos, não impedindo, por exemplo, uma variação de comprimento de uma barra devido à temperatura.

Já se os vínculos externos (apoios) sofrerem pequenos deslocamentos, só introduzirão movimento de corpo rígido, não causando deformações internas e por conseguinte não há esforços internos. Este é o caso de recalques de apoio em estruturas isostáticas, sendo esta uma vantagem deste tipo de estrutura.

De maneira análoga modificações impostas na montagem da estrutura isostática, tais como imperfeições no comprimento das barras de uma treliça, não introduzem esforços adicionais, causando apenas deslocamentos.

No caso da estrutura hiperestática existem inúmeras soluções que satisfazem as condições de equilíbrio para um mesmo carregamento (por que?). A solução correta é aquela que satisfaz além do equilíbrio, compatibilidade de deslocamentos. Isto torna a resolução da estrutura hiperestática mais complexa.

Apesar das vantagens já vistas da estrutura isostática, além da facilidade de resolução, a maioria das estruturas é hiperestática. Isto se deve aos seguintes motivos:

- 1º- Algumas formas estruturais são intrinsecamente hiperestáticas, tais como a estrutura de um edifício, uma casca, uma treliça espacial, etc.
- 2º- Os esforços em uma estrutura hiperestática são geralmente menores do que em uma estrutura isostática correspondente, pois há uma melhor distribuição de esforços. Isto pode ser entendido a partir das estruturas da figura 1.16, verificando que o momento  $M_2$  é menor que  $M_1$ .

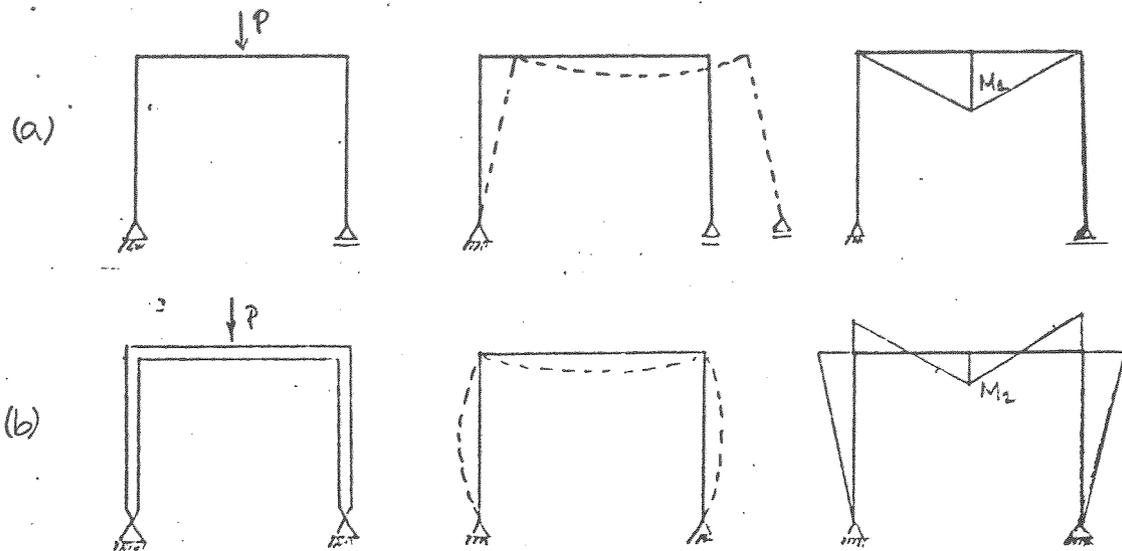


Figura 1.16 - Esforços em Estruturas Isostáticas e Hiperestáticas

39- Na estrutura hiperestática há um controle maior dos esforços internos por parte do projetista. Isto pode ser entendido se compararmos o diagrama de momentos fletores da estrutura da figura 1.16-b com o da estrutura da figura 1.17, onde as barras verticais são mais rígidas.  $M_3$  é menor que  $M_2$ .

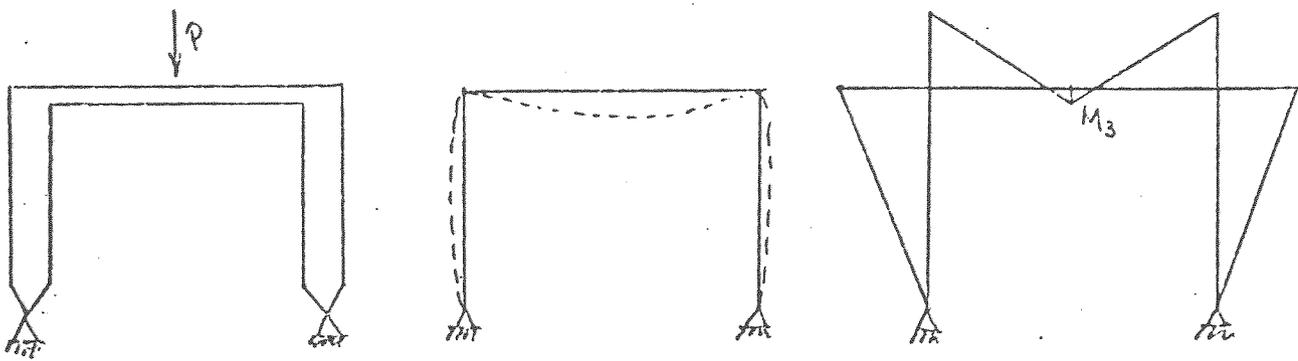


Figura 1.17 - Controle dos esforços

O projetista pode variar as rigezas relativas entre os membros da estrutura para alterar os esforços internos. Isto não pode ser feito para o caso de uma estrutura isostática pois só existe uma solução para os esforços internos: aquela que satisfaz as condições de equilíbrio.

O bom projetista estrutural é aquele que sabe tomar partido desta vantagem da estrutura hiperestática, minimizando ao máximo os esforços internos.

49- Em uma estrutura hiperestática os v̄nculos excedentes (hiperestáticos) podem induzir a uma segurança adicional.

A Estrutura hiperestática pode ter a capacidade de redistribuir forças se parte da estrutura ẽ sobrecarregada. Dois exemplos desta capacidade s̄o mostrados na figura 1.18. Se a diagonal  $D_1$  da treliça da figura 1.18-a flambar, a outra diagonal ainda pode resistir sob traç̄o. O aparecimento de uma rótula plástica na extremidade da direita da viga da figura 1.18-b n̄o acarretaria na destruiç̄o da estrutura, pois ela se comportaria como viga simplesmente apoiada, ainda est̄avel.

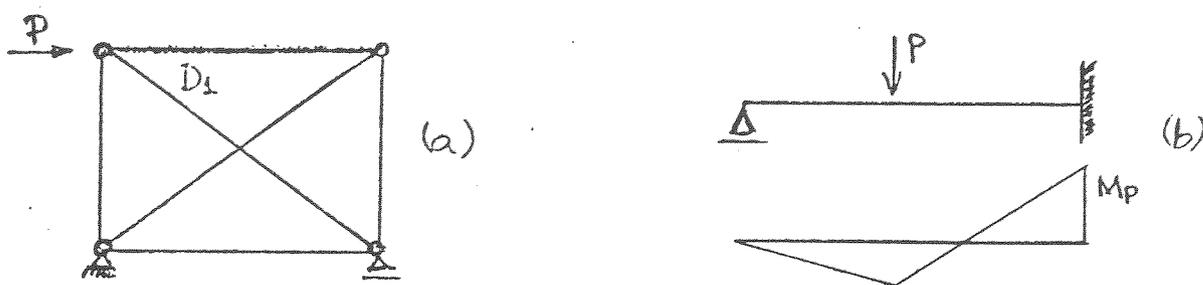


Figura 1.18 - Segurança adicional

### 1.7. Métodos Básicos da Análise Estrutural

A análise de modelos estruturais nada mais ẽ do que a determinaç̄o de uma soluç̄o que satisfaça condiç̄ões de equilíbrío, condiç̄ões de compatibilidade de deslocamentos e relaç̄ões tensão-deformaç̄o. Os métodos básicos da análise estrutural se diferenciam pela ordem em que estas condiç̄ões s̄o impostas.

Para nos ajudar na apresentaç̄o dos dois métodos, ẽ interessante definir para uma determinada estrutura duas entidades:

#### - Campo de Forças em Equilíbrío ( $F, \sigma$ )

É um sistema de forças tal que as forças externas,  $F$ , (carregamento e reaç̄ões de apoio) e as tensões internas,  $\sigma$ , satisfazem todas as condiç̄ões de equilíbrío da estrutura. Os deslocamentos e deformaç̄ões correspondentes n̄o precisam satisfazer as condiç̄ões de compatibilidade.

### - Configuração de Deslocamentos Compatíveis (D, $\epsilon$ )

É uma forma deformada da estrutura tal que os deslocamentos externos,  $D$ , e as deformações internas,  $\epsilon$ , satisfazem todas as condições de compatibilidade da estrutura. As forças e tensões associadas a esta forma deformada não precisam satisfazer as condições de equilíbrio.

#### 1.7.1. Método das Forças

Também é chamado de Método da Compatibilidade, ou Método da Flexibilidade.

Tem como idéia básica determinar, dentro do conjunto de campo de forças ( $F, \sigma$ ) que satisfazem as condições de equilíbrio, qual o que faz com que as condições de compatibilidade de deslocamentos fiquem satisfeitas.

As incógnitas do método são forças (e/ou momentos), daí o seu nome, e as equações finais são de compatibilidade.

#### 1.7.2. Método dos Deslocamentos

Também é chamado de Método do Equilíbrio, ou Método da Rigidez.

Tem como idéia básica determinar, dentro do conjunto de configurações deformadas ( $D, \epsilon$ ) que satisfazem as condições de compatibilidade, qual o que faz com que a estrutura fique em equilíbrio.

As incógnitas do método são deslocamentos (e/ou rotações), daí o seu nome, as equações finais são de equilíbrio.

Este é o método que nós iremos tratar.

#### 1.7.3. Exemplo de Aplicação

Para exemplificar a utilização dos dois métodos vamos analisar a treliça da figura 1.19. Todas as barras têm área transversal  $A$  e módulo de elasticidade  $E$ .

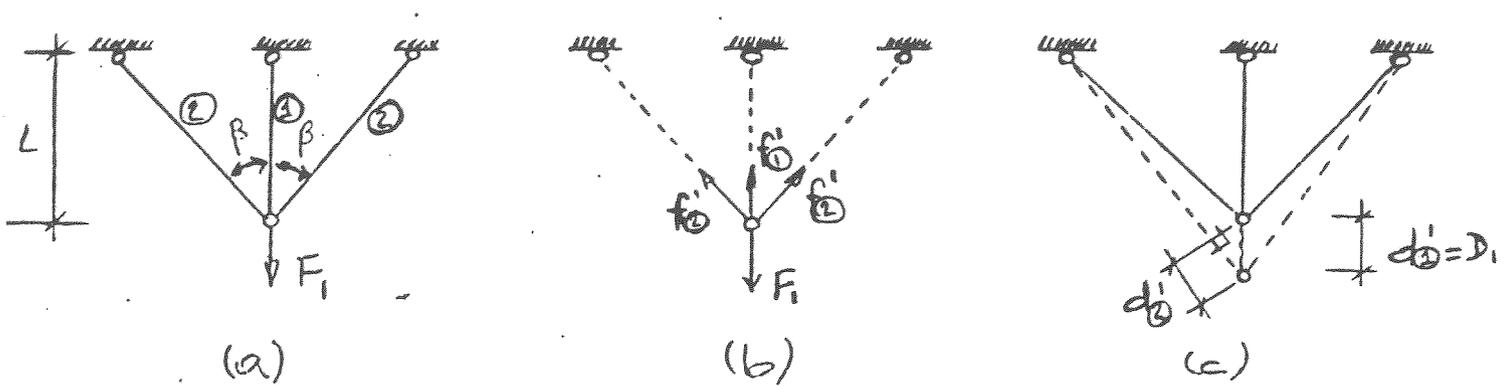


Figura 1.19 - Exemplo de Aplicação

Da figura 1.19-b tiramos a equação de equilíbrio:

$$f_1 + 2f_2 \cos\beta = F_1 \quad (1.24)$$

Da figura 1.19-c tiramos a equação de compatibilidade, onde estamos adotando a hipótese de pequenos deslocamentos:

$$d_2 = d_1 \cos\beta \quad (1.25)$$

Da relação entre as tensões e deformações, expressão 1.15, tiramos as relações entre esforços e deslocamentos de cada uma das barras:

$$\frac{f_1}{A} = E \frac{d_1}{L}, \text{ ou } f_1 = \frac{EA}{L} d_1 \quad (1.26)$$

$$\frac{f_2}{A} = E \frac{d_2}{L/\cos\beta}, \text{ ou } f_2 = \frac{EA}{L} \cos\beta d_2 \quad (1.27)$$

#### 1.7.3.1. Solução pelo Método das Forças

A incôgnita escolhida é a força  $f_1$ . A sequência da resolução por este método segue a seguinte ordem:

1º- Equação de equilíbrio (1.24) que define o conjunto de soluções  $(f_1, f_2)$  que satisfazem equilíbrio.

$$f_2' = \frac{F_1 - f_1'}{2\cos\beta}$$

29- Relações força-deslocamento (1.26) e (1.27)

$$d_1' = \frac{L}{EA} f_1' \quad ; \quad d_2' = \frac{L}{2EA\cos^2\beta} (F_1 - f_1')$$

39- Equação final de compatibilidade (1.25) escrita em termos de força

$$\frac{L}{2EA\cos^2\beta} (F_1 - f_1') = \frac{L}{EA} f_1' \cos\beta$$

Temos então a solução final:

$$f_1' = \frac{F_1}{1+2\cos^2\beta}$$

A força  $f_2'$  fica determinada pela expressão (1.24):

$$f_2' = \frac{F_1 \cos^2\beta}{1+2\cos^3\beta}$$

Os deslocamentos ficam determinados pelas expressões (1.26) e (1.27):

Normalmente a resolução pelo método das forças é feita somando-se soluções que satisfazem equilíbrio para no final impor a compatibilidade de deslocamentos. Senão, vejamos.

Observando a equação de equilíbrio (1.24) verifica-se que esta contém duas forças desconhecidas. Selecionando  $f_1'$  como redundante (hiperestático), corta-se a barra 1, transformando a estrutura em isostática, como mostrado na figura 1.20-a. Quando a força  $f_1$  atuar na estrutura assim liberada, causará um deslocamento relativo entre as seções cortadas da barra 1 igual a:

$$\delta_0 = \frac{F_1 L}{2EA\cos^3\beta}$$

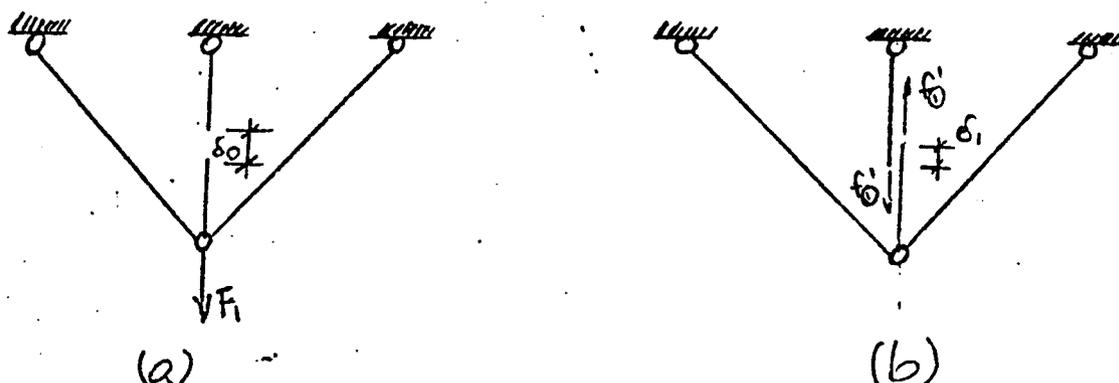


Figura 1.20 - Método das Forças

A esta primeira solução, que satisfaz equilíbrio mas não satisfaz compatibilidade com os vínculos originais da estrutura, vamos somar a solução da figura 1.20-b, onde a força redundante atua na estrutura liberada:

$$\delta_1 = \frac{f'_1 L}{2EA \cos^3 \beta} + \frac{f'_1 L}{EA} = \frac{(1+2\cos^3 \beta) f'_1 L}{2EA \cos^3 \beta}$$

A condição de compatibilidade exige que o deslocamento relativo entre as duas seções cortadas seja nulo. Assim,  $\delta_0 - \delta_1 = 0$  implica na determinação de  $f'_1$ .

Este último enfoque para o método das forças é o mais conhecido e adotado.

#### 1.7.3.2. Solução pelo Método dos Deslocamentos

A incógnita escolhida é o deslocamento  $D_1 = d'_1$ . A sequência da resolução segue a seguinte ordem:

1º- Condição de compatibilidade (1.25) para definir o conjunto de soluções  $(d'_1, d'_2)$  que satisfazem compatibilidade.

$$d'_2 = d'_1 \cos \beta = D_1 \cos \beta$$

29- Relações força-deslocamentos (1.26) e (1.27)

$$f_1' = \frac{EA}{L} D_1 \quad ; \quad f_2' = \frac{EA}{L} \cos^2 \beta \cdot D_1$$

30- Equação final de equilíbrio (1.24) escrita em termos de deslocamento

$$\frac{EA}{L} D_1 + 2 \frac{EA}{L} \cos^3 \beta D_1 = F_1$$

Temos então a solução final:

$$D_1 = \frac{F_1 L}{EA} \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \beta}$$

O deslocamento  $d_1'$  fica determinado pela equação (1.25) e as forças  $f_1'$  e  $f_2'$  ficam determinadas pelas expressões (1.26) e (1.27).

Normalmente a solução pelo método dos deslocamentos é feita somando-se soluções que satisfazem compatibilidade de deslocamentos para no final impor as condições de equilíbrio, como é mostrado a seguir.

Considere as duas estruturas da figura 1.21, onde em cada uma delas é aplicada uma força tal que elas sofram um deslocamento igual,  $D_1$ .

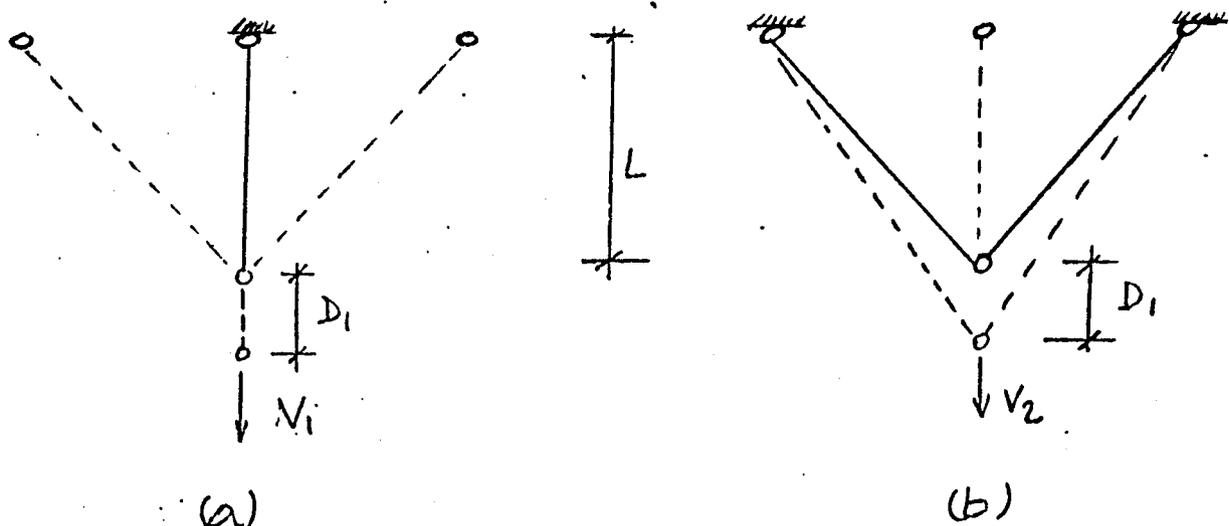


Figura 1.21 - Método dos Deslocamentos

Sendo que,

$$V_1 = \frac{EA}{L} D_1 \quad \text{e} \quad V_2 = 2 \frac{EA}{L} \cos^3 \beta D_1$$

Observe que ambas as estruturas da figura 1.21 tem deslocamentos compatíveis com os da estrutura original (figura 1.19). Então, a soma das duas soluções fornecerá a solução para o problema original se a condição de equilíbrio  $V_1 + V_2 = F_1$  for satisfeita. Chega-se assim ao valor de  $D_1$ .

Este último enfoque para o método dos deslocamentos nos sugere a somar as contribuições de diversos elementos estruturais, sempre satisfazendo a compatibilidade, sendo que o total das contribuições deve ser igualado à força total aplicada. Por exemplo, para a estrutura em estudo, poderíamos somar a contribuição das três barras em separado, como mostra a figura 1.22. Observe que este método também se aplica a estruturas isostáticas.

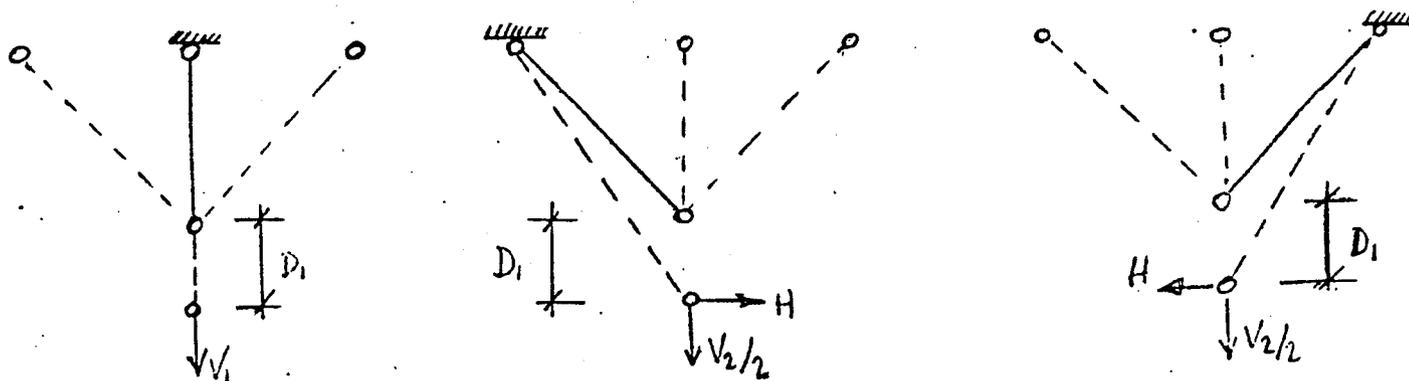


Figura 1.22 - Soma de Contribuições

### 1.8. Princípio dos Trabalhos Virtuais

O princípio de conservação de energia é um importante conceito utilizado na análise estrutural. Na sua forma natural ele expressa que o trabalho feito pelas forças externas de um sistema estrutural durante o processo de carregamento,  $W_E$ , é igual à energia de deformação interna,  $U$ , armazenada pelo corpo. Este princípio pode ser utilizado para calcular deslocamentos em estruturas como mostra o exemplo da figura 1.23.

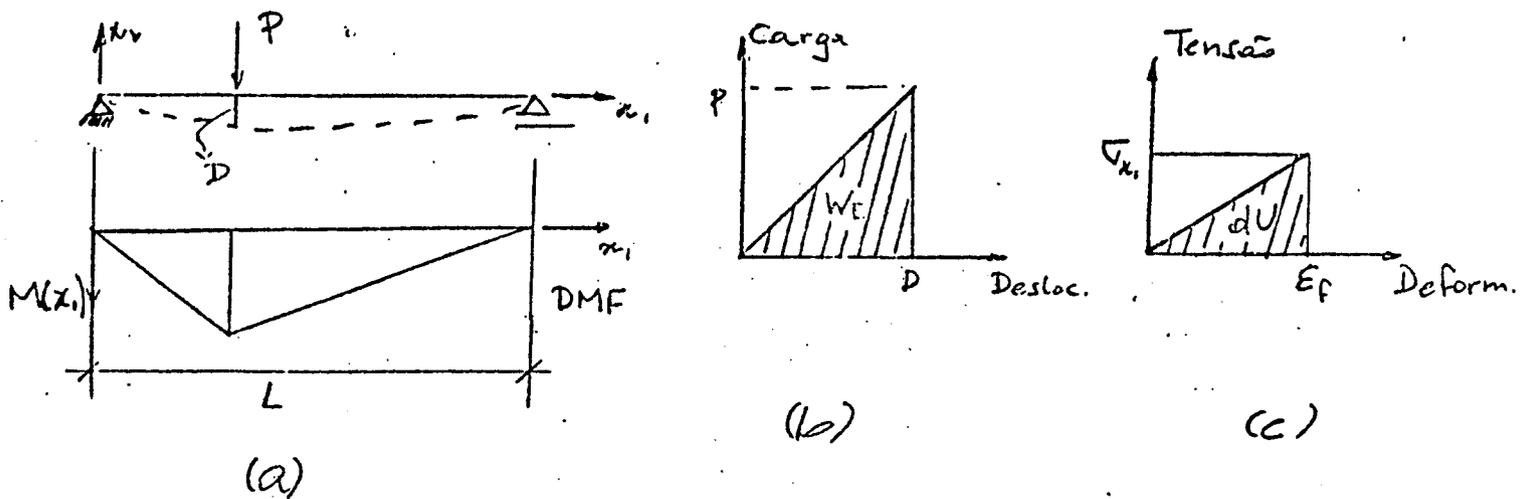


Figura 1.23 - Conservação de Energia

O trabalho externo é igual a área sob o diagrama carga-deslocamento (figura 1.23-b). Admitindo um comportamento linear para a estrutura, temos

$$W_E = \frac{1}{2} PD \quad (1.28)$$

O termo  $\frac{1}{2}$  aparece porque os deslocamentos são provenientes das forças, e porque há linearidade.

A energia de deformação interna é dada por

$$U = \int_V dU \quad (1.29)$$

$$\text{Sendo } dU = \frac{1}{2} \sigma_{x_1} \epsilon_f dV \quad (1.30)$$

Com auxílio das expressões (1.13) e (1.22) podemos escrever que (admitindo  $dV = dA dx_1$ ):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{d^2 v}{dx_1^2} \right) \left\{ \int_A -\sigma_{x_1} \cdot x_2 dA \right\} dx_1 \quad (1.31)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M}{EI} \cdot M dx_1, \text{ ou } U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx_1$$

O princípio de conservação de energia nos diz que  $W_E = U$ . Igualando, então, as expressões (1.28) e (1.31) temos

$$D = \frac{1}{P} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx_1 \quad (1.32)$$

Infelizmente este princípio na sua forma natural só pode ser usado para determinar o deslocamento do ponto onde a carga é aplicada e na direção da carga. Também só pode atuar uma carga.

O princípio de conservação de energia pode ter seu enfoque modificado a fim de que se possa eliminar as limitações notadas acima.

Imaginamos um sistema de forças  $(F, \sigma)$  em equilíbrio e uma configuração de deslocamentos  $(D, \epsilon)$  compatíveis tal como foram definidas no item 1.7. Não existe qualquer ligação entre o campo de forças e a configuração de deslocamentos a não ser que vão ser aplicadas a uma mesma estrutura.

O princípio de conservação de energia expressa que: "O trabalho total das forças externas  $F$  atuando sobre seus respectivos deslocamentos  $D$  é igual ao trabalho total das tensões internas  $\sigma$  atuando sobre suas respectivas deformações  $\epsilon$ ". O que pode ser expresso por:

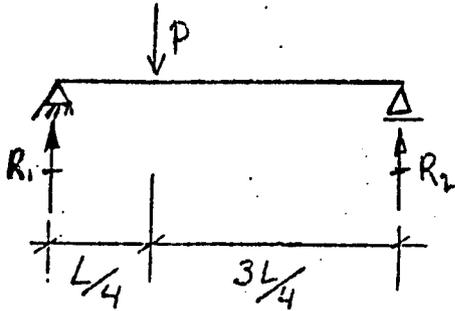
$$\begin{array}{c} \text{equilíbrio} \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \Sigma DF = \int_V \epsilon \cdot \sigma \, dV \\ \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ \text{compatíveis} \end{array} \quad (1.33)$$

Nesta expressão não aparece o termo  $\frac{1}{2}$  porque não há qualquer ligação entre forças e deslocamentos, e tensões e deformações.

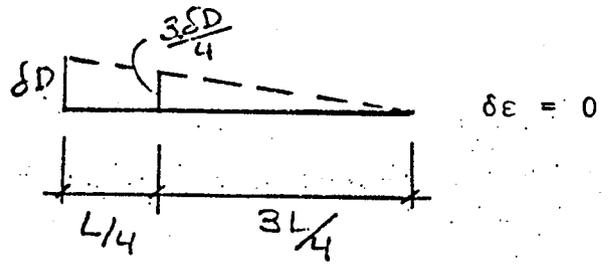
Se nós estamos interessados em determinar as condições de equilíbrio de um campo de forças  $(F, \sigma)$ , basta que imaginemos uma configuração de deslocamentos compatíveis  $(\delta D, \delta \epsilon)$  arbitrário, que chamaremos de virtual, e comprovar o princípio da conservação de energia dado na expressão (1.33).

Seja por exemplo a viga da figura 1.24, onde se deseja calcu

lar a reação de apoio  $R_1$ .



Campo de Forças ( $F, \sigma$ ) Reais  
(a)



Deslocamentos Virtuais ( $\delta D, \delta \epsilon$ )  
Compatíveis  
(b)

Figura 1.24 - Princípio dos Deslocamentos Virtuais

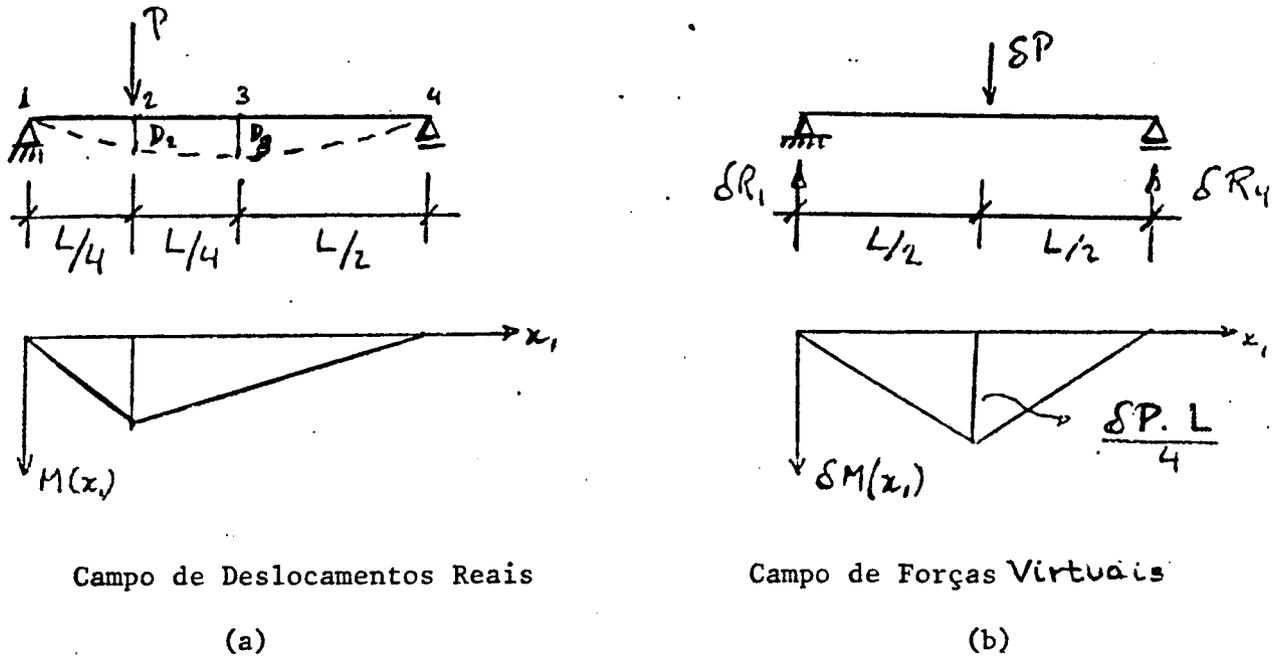
A aplicação do princípio da conservação de energia resulta em

$$\delta D \cdot R_1 - \frac{3 \cdot \delta D}{4} \cdot P = \int_V \delta \epsilon \cdot \sigma \cdot dV = 0$$

ou,  $R_1 = \frac{3}{4} P$ , o que nada mais é do que a reação determinada por equilíbrio.

Se por outro lado estamos interessados em calcular deslocamentos em estruturas provenientes de um carregamento, ou uma variação de temperatura, ou qualquer outro efeito, podemos imaginar o trabalho virtual provocado pelo sistema de forças arbitrárias (virtuais) ( $\delta F, \delta \sigma$ ), em equilíbrio, sobre o campo de deslocamentos reais ( $D, \epsilon$ ).

Por exemplo, para determinar o deslocamento vertical do ponto 3 da estrutura da figura 1.25-a, utilizamos o campo de forças virtuais da figura 1.25-b.



Campo de Deslocamentos Reais

(a)

Campo de Forças Virtuais

(b)

Figura 1.25 - Princípio das Forças Virtuais

A aplicação do princípio da conservação de energia resulta em

$$\delta P \cdot D_3 = \int_V \delta \sigma_{x_1} \cdot \epsilon_f \, dV.$$

Utilizando as expressões (1.13) e (1.22), chegamos a

$$\delta P \cdot D_3 = \int_0^L \frac{\delta M \cdot M}{EI} \, dx_1, \text{ ou } D_3 = \frac{1}{\delta P} \int_0^L \frac{\delta M \cdot M}{EI} \, dx_1$$

Na verdade a determinação do deslocamento  $D_3$  é uma garantia de que os deslocamentos reais da estrutura são compatíveis com os vínculos externos, já que as forças virtuais externas  $\delta R_1$  e  $\delta R_2$  não produzem trabalho pois  $D_1$  e  $D_4$  são nulos.

O princípio da conservação de energia nos induziu, então, aos dois Princípios de Trabalhos Virtuais, quais sejam, o Princípio dos Deslocamentos Virtuais, e o Princípio das Forças Virtuais, que serão apresentados mais formalmente nos itens que se seguem.

### 1.8.1. Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV)

Este princípio diz que: "Dado um sistema de forças reais ( $F, \sigma$ ) e uma configuração de deslocamentos compatíveis ( $\delta D, \delta \epsilon$ ) arbitrária (virtual), a igualdade  $\delta W_E = \delta U$  estabelece uma condição de equilíbrio para o campo de forças". Sendo:

$$\begin{aligned} \delta W_E &= \text{trabalho virtual das forças externas} \\ \delta W_E &= \sum \delta D \cdot F \end{aligned} \quad (1.34-a)$$

$$\begin{aligned} \delta U &= \text{energia de deformação interna virtual} \\ \delta U &= \int_V \delta \epsilon \cdot \sigma \, dV \end{aligned} \quad (1.34-b)$$

#### 1.8.1.1. Exemplo de Aplicação

Estamos interessados em determinar a força  $f_1'$  necessária para impor uma configuração deformada real na barra de treliça da figura 1.26, tal que  $d_1' = 0$  e  $d_2' = 1$ .

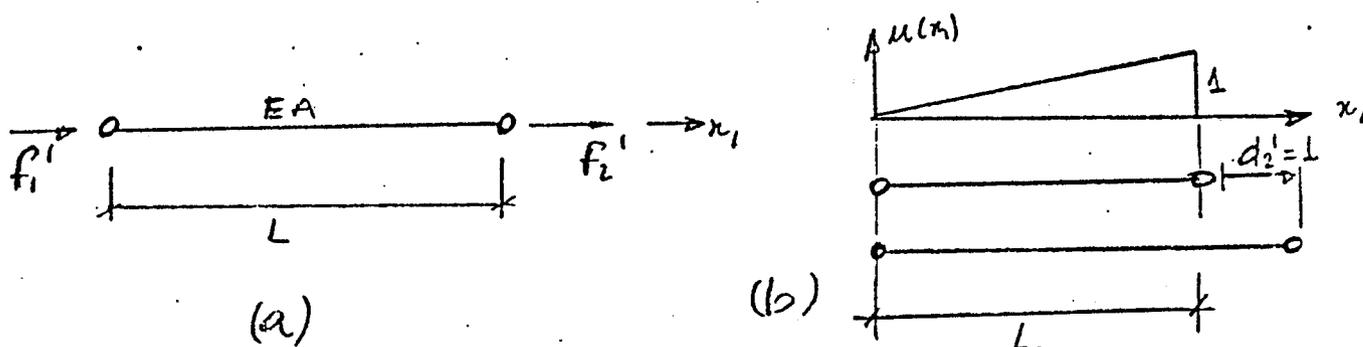


Figura 1.26 - Campos de Forças e Deslocamentos Reais

Sabemos que as deformações  $\epsilon_a$  e tensões  $\sigma_{x_1}$  são constantes no interior da barra ( $\sigma_{x_1} = E\epsilon_a$ ):

$$\epsilon_a = \frac{d_2'}{L} = \frac{1}{L} \quad ; \quad \sigma_{x_1} = E \cdot \frac{1}{L}$$

Da expressão (1.12) deduzimos que o deslocamento  $u(x_1)$  tem uma variação linear ao longo da barra, como mostra a figura 1.26-b:

$$u(x_1) = \frac{x_1}{L}$$

O campo de deslocamentos virtuais escolhido é tal que  $\delta d_1^i$  produz trabalho externo, como mostrado na figura 1.27.

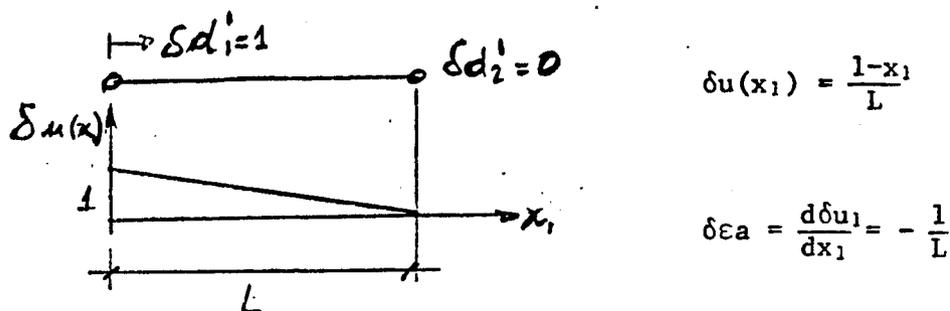


Figura 1.27 - Campo de Deslocamentos Virtuais

A aplicação de  $W_E = U$  resulta em (vide (1.34)):

$$\delta d_1^i \cdot f_1^i + \delta d_2^i \cdot f_2^i = \int_V \delta \epsilon \alpha \cdot \sigma_{x_1} dV$$

$$f_1^i = \int_0^L \left(-\frac{1}{L}\right) \cdot E \cdot \frac{1}{L} A \cdot dx_1, \text{ ou, } f_1^i = -\frac{EA}{L}$$

### 1.8.2. Princípio das Forças Virtuais (PFV)

Este princípio diz que: "Dado um campo de deslocamentos reais  $(D, \epsilon)$  e um campo de forças em equilíbrio  $(\delta F, \delta \sigma)$  arbitrário (virtual), a igualdade  $\delta W_E^* = \delta U^*$  estabelece uma condição de compatibilidade para o campo de deslocamentos". Sendo que:

$$\begin{aligned} \delta W_E^* &= \text{trabalho complementar virtual das forças externas} \\ \delta W_E^* &= \sum \delta F \cdot D \end{aligned} \quad (1.35-a)$$

$$\begin{aligned} \delta U^* &= \text{energia complementar de deformação virtual} \\ \delta U^* &= \int_V \delta \sigma \cdot \epsilon dV \end{aligned} \quad (1.35-b)$$

#### 1.8.2.1. Exemplo de Aplicação

A principal aplicação do princípio das forças virtuais está na determinação de deslocamentos em estruturas, quer sejam estaticamente determinadas ou indeterminadas.

Tomemos como exemplo a estrutura da figura 1.28, que está submetida a diversas solicitações tais como carregamento aplicado, variação de temperatura e recalques de apoio. Estamos querendo determinar o deslocamento vertical  $D$ .

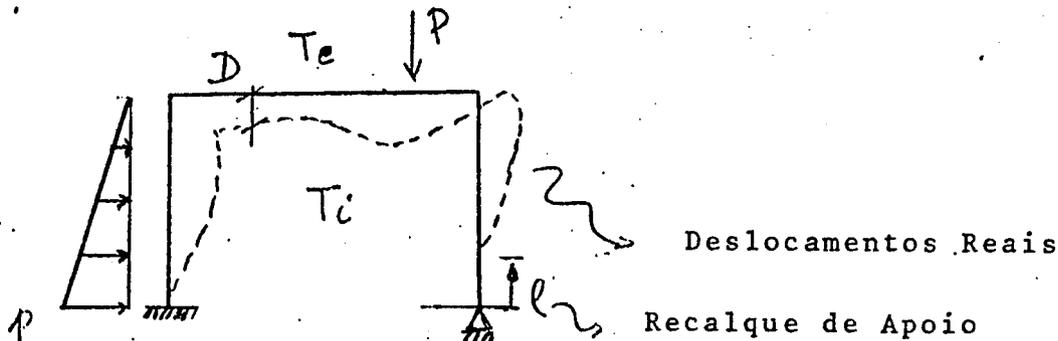


Figura 1.28 - Campo de Deslocamentos Reais

As deformações reais, onde são as deformações normais à seção transversal são consideradas, podem ser divididas em duas parcelas:

- parcela devida a esforço normal e momento fletor (vide expressões (1.13 e 1.22))

$$\epsilon x_1 = \frac{N}{EA} - \frac{M}{EI} x_2 \quad (1.36-a)$$

Sendo  $x_2$  a distância do ponto da deformação ao centro de gravidade da seção transversal.

Os esforços normais e momentos fletores são provocados pelo carregamento, pela variação de temperatura e pelos recalques de apoio. Em estruturas isostáticas, como visto no item 1.6.3, variação de temperatura e recalques de apoio não produzem esforços internos.

- parcela devida a variação de temperatura

Esta parcela aparece tanto em estruturas isostáticas quanto hiperestáticas, e é obtida como mostra a figura 1.29, onde adota-se a hipótese das seções planas.  $\alpha$  é o coeficiente de dilatação térmica.

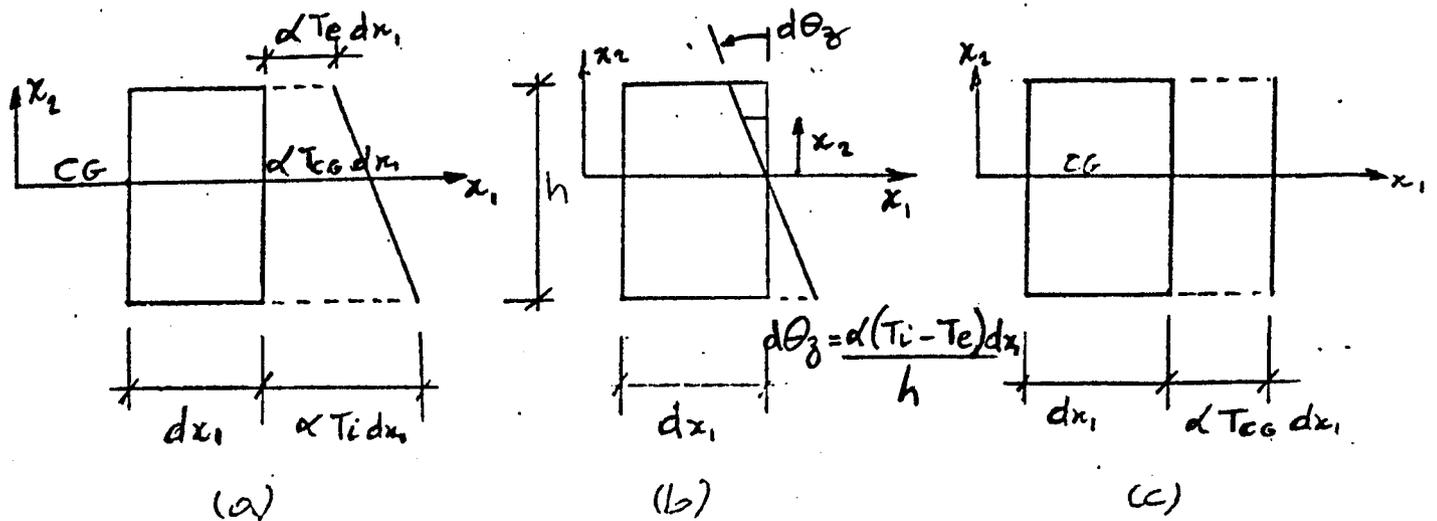


Figura 1.29 - Deformações Devido a Variação de Temperatura

$$\text{Assim, } \epsilon_{x_1} = \frac{\alpha \cdot T_{cg} \cdot dx_1}{dx_1} - \frac{d\theta_z \cdot x_2}{dx_1} \quad \text{ou} \quad (1.36-b)$$

$$\epsilon_{x_1} = \alpha \cdot T_{cg} - \frac{\alpha(T_i - T_e) \cdot x_2}{h}$$

A deformação total real  $\tilde{\epsilon}$ , então, obtida pela soma das expressões (1.36-a) e (1.36-b):

$$\epsilon_{x_1} = \frac{N}{EA} - \frac{M}{EI} x_2 + \alpha T_{cg} - \frac{\alpha(T_i - T_e) \cdot x_2}{h} \quad (1.36-c)$$

O campo de forças virtuais a ser escolhido deve satisfazer somente a condições de equilíbrio. Neste caso pode-se escolher as forças e tensões que aparecem na estrutura da figura 1.30, que é uma estrutura isostática obtida a partir da estrutura original.

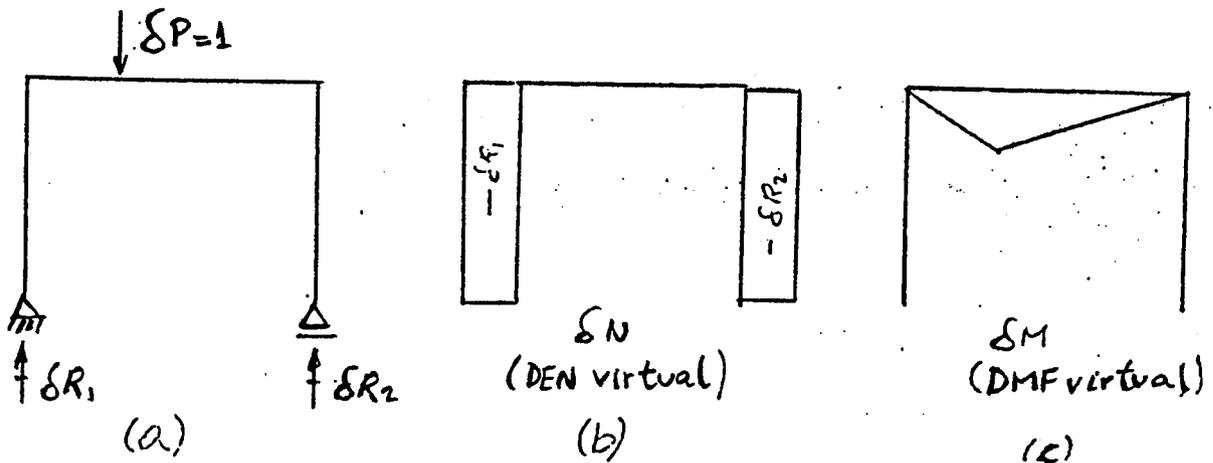


Figura 1.30 - Campo de Forças Virtuais

A aplicação de  $\delta W_E^* = \delta U^*$  resulta em (vide 1.35):

$$\delta P \cdot D + \delta R_2 \cdot \rho = \int_V \delta \sigma_{x_1} \cdot \epsilon_{x_1} dV \quad (1.37)$$

$$\text{onde } \delta \sigma_{x_1} = \frac{\delta N}{A} - \frac{\delta M \cdot x_2}{I} \quad (1.38)$$

As expressões (1.38) e (1.36-c) podem ser substituídas em (1.37):

$$\delta P \cdot D + \delta R_2 \cdot \rho = \int_{\text{estrutura}} \left\{ \int_A \left( \frac{\delta N}{A} \cdot \frac{N}{EA} - \frac{\delta N}{A} \cdot \frac{Mx_2}{EI} + \frac{\delta N}{A} \cdot \alpha T_{cg} - \frac{\delta N}{A} \cdot \frac{\alpha(T_i - T_e)x_2}{h} \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\delta M \cdot x_2}{I} \cdot \frac{N}{EA} + \frac{\delta M \cdot x_2}{I} \cdot \frac{M \cdot x_2}{EI} - \frac{\delta M \cdot x_2}{I} \alpha T_{cg} + \frac{\delta M \cdot x_2}{I} \cdot \frac{\alpha(T_i - T_e) \cdot x_2}{h} \right) dA \} ds$$

Mas como  $\int_A dA = A$ ,  $\int_A x_2 dA = 0$  e  $\int_A x_2^2 dA = I$ , chega-se a

$$\delta P \cdot D + \delta R_2 \rho = \int_{\text{est.}} \frac{\delta N \cdot N}{EA} ds + \int_{\text{est.}} \frac{\delta M \cdot M}{EI} ds + \int_{\text{est.}} \delta N \cdot \alpha T_{cg} ds + \int_{\text{est.}} \delta M \cdot \frac{\alpha(T_i - T_e)}{h} ds \quad (1.39)$$

E assim chega-se ao valor para o deslocamento  $D$ .

Algumas observações podem ser feitas quanto à aplicação da expressão acima:

- O termo  $\int_{\text{est.}} \frac{\delta N \cdot N}{EA} ds$  (energia de deformação virtual provocada por esforço normal)

Pode ser desprezado em presença dos outros para elementos estruturais que não trabalham fundamentalmente a esforços axiais.

- Para estruturas isostáticas submetidas somente a variação de temperatura ou recalques de apoio  $N=0$  e  $M=0$ . Estes esforços aparecem em estruturas hiperestáticas quando submetidas a estas solicitações.
- A escolha mais natural para a estrutura onde se aplica o campo de forças virtuais seria a própria estrutura original (no exemplo hiperestática). Como foi dito, pode-se escolher qualquer estrutura isostática obtida a partir da original, tendo-se como vantagem a facilidade de obtenção dos diagramas de esforços virtuais  $\delta N$  e  $\delta M$ . Isto porque o campo de forças deve satisfazer somente condições de equilíbrio, e não compatibilidade com os vínculos da estrutura original.

Entretanto, um cuidado deve ser tomado na escolha da estrutura isostática: não se deve criar vínculos que não existem na estrutura original, como por exemplo na estrutura da figura 1.31.

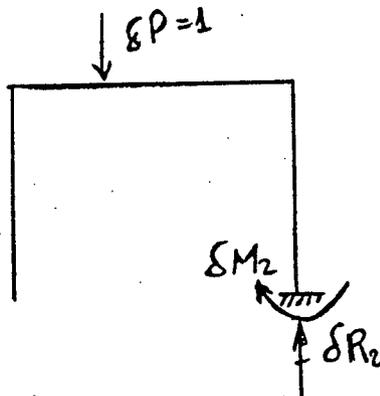


Figura 1.31 - Campo de Forças Virtuais não Conveniente

Neste caso, na parcela do trabalho complementar virtual das forças externas, deve-se computar o trabalho feito pelo mo

mento  $\delta M_2$  com a rotação real no apoio da direita, e assim:

$$\delta W_E^* = \delta P \cdot D + \delta R_2 \cdot \rho + \delta M_2 \cdot \theta_{z_2}$$

- A expressão (1.39) tem a sua maior aplicação na determinação de deslocamentos em estruturas isostáticas. Isto se faz sentir quando se aplica o Método das Forças como foi mostrado no item 1.7.3.1.

A aplicação em estruturas hiperestáticas requer o conhecimento prévio dos esforços internos. Neste caso, a expressão (1.39) pode servir para verificar a correção dos diagramas dos esforços internos, determinando-se um deslocamento conhecido (por exemplo nulo) da estrutura. Por exemplo para verificar a correção dos diagramas da estrutura da figura 1.28, pode-se calcular a rotação na seção do apoio da esquerda (rotação nula) utilizando o campo de forças virtuais da figura 1.32.

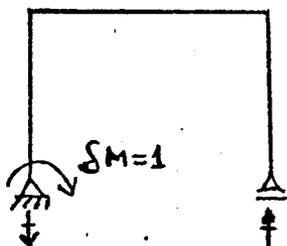


Figura 1.32 - Campo de Forças Virtuais para Verificação da correção dos diagramas

### 1.8.3. Teoremas de Reciprocidade

Os princípios de trabalhos virtuais (PDV e PFV) podem ser usados para formular os dois teoremas da reciprocidade que muitas vezes é útil na análise de estruturas elástico-lineares.

Vamos considerar uma mesma estrutura submetida a dois conjuntos de forças  $(F, \sigma)$  e  $(\bar{F}, \bar{\sigma})$ . Se nós imaginarmos que o conjunto  $F$  atua inicialmente e que o conjunto  $\bar{F}$  produz deslocamentos e deformações virtuais  $(\bar{D}, \bar{\epsilon})$ , O PDV estabelece que:

$$\Sigma \bar{D} F = \int_V \bar{\epsilon} \sigma dv \quad (1.40)$$

Se por outro lado, nós imaginarmos que o conjunto  $(F, \sigma)$  produz deslocamentos e deformações virtuais  $(D, \epsilon)$  depois de o conjunto  $(\bar{F}, \bar{\sigma})$  estar atuando, temos também pelo PDV que:

$$\Sigma D \bar{F} = \int_V \epsilon \bar{\sigma} dv \quad (1.41)$$

Sendo a estrutura elástico-linear, as tensões são relacionadas com as deformações linearmente pelo conjunto de coeficientes esquematicamente chamados de E. Assim,

$$\begin{aligned} \sigma &= E \epsilon \\ \bar{\sigma} &= E \bar{\epsilon} \end{aligned}$$

que substituídas nas expressões (1.40) e (1.41) resultam em:

$$\begin{aligned} \Sigma \bar{D} F &= \int_V \bar{\epsilon} E \epsilon dv \quad e \quad \Sigma D \bar{F} = \int_V \epsilon E \bar{\epsilon} dv \quad \text{ou} \\ \Sigma F \bar{D} &= \Sigma \bar{F} D \end{aligned} \quad (1.42)$$

A equação (1.42) expressa o Teorema de Betti, que diz: "Se uma estrutura elástico-linear é submetida a dois sistemas independentes de forças, o trabalho feito pelo primeiro sistema com os deslocamentos produzidos pelo segundo sistema é igual ao trabalho feito pelo segundo com os deslocamentos produzidos pelo primeiro sistema".

Como um caso especial do teorema de Betti, vamos considerar que cada sistema de forças consiste de apenas uma força (ou momento) de magnitude arbitrária. Por exemplo vamos considerar a estrutura mostrada na figura 1.33, submetida a dois casos de carga.

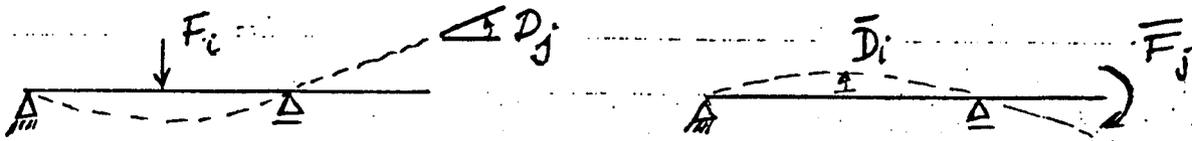


Figura 1.33 - Teorema de Maxwell

Aplicando o teorema de Betti temos:  $F_i \bar{D}_i = \bar{F}_j D_j$

Se adotarmos  $F_i$  e  $\bar{F}_j$  unitários teremos

$$\bar{D}_i = D_j \quad (1.43-a)$$

Se adotarmos  $\bar{D}_i$  e  $D_j$  unitários teremos

$$F_i = \bar{F}_j \quad (1.43-b)$$

A equação (1.43) expressa o Teorema de Maxwell, que diz: "Para uma estrutura elástico-linear, o deslocamento (ou força) generalizado na coordenada  $\underline{i}$  devido a uma força (ou deslocamento) generalizada unitária na coordenada  $\underline{j}$  é igual ao correspondente deslocamento (ou força) generalizado em  $\underline{j}$  devido a uma força (ou deslocamento) generalizada unitária em  $\underline{i}$ ".

### 1.9. Matrizes de Rigidez

Dos métodos básicos da análise estrutural apresentados no item 1.7, o método dos deslocamentos é o que melhor se aplica na utilização de computadores, e por isso vai ser o método em foco no nosso curso. É possível escrever rotinas bem gerais dentro do enfoque deste método, capazes de resolver o problema da análise estrutural, qual seja, determinar esforços e deslocamentos em estruturas. O método se aplica para treliças, quadros e grelhas, bem como para estruturas compostas por elementos es

estruturas planas ou tridimensionais (estruturas não compostas por barras).

O método dos deslocamentos trabalha com as chamadas matrizes de rigidez. Estas matrizes serão estudadas para cada tipo de estrutura (treliças, quadros, etc.) nos capítulos que seguem. Neste item apenas definiremos o que são as matrizes de rigidez, exemplificadas para o quadro da figura 1.34.

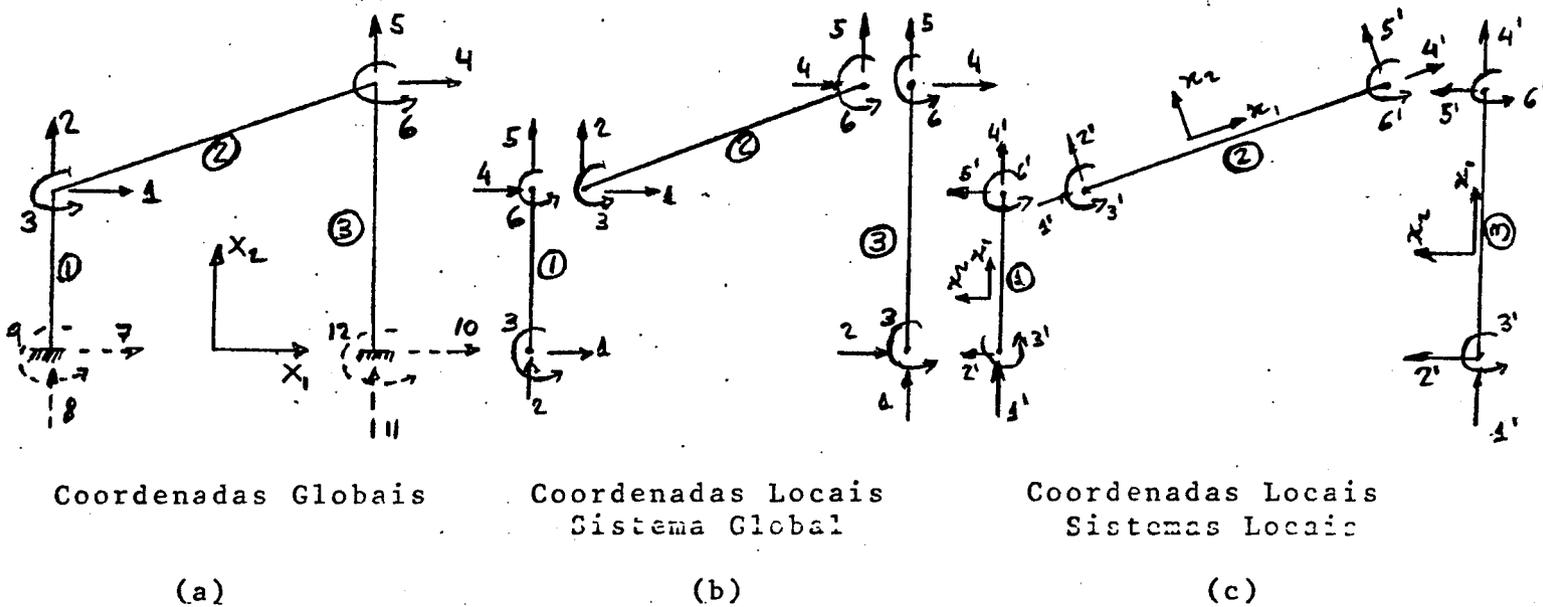


Figura 1.34 - Coordenadas Globais e Locais

### 1.9.1. Matriz de Rigidez Global

Matriz de rigidez global estabelece relações entre forças e deslocamentos definidos pelas coordenadas globais. Estas relações são escritas, para as coordenadas globais da figura 1.34-a, como mostra a expressão (1.44).

$$\begin{aligned}
 &K_{11} D_1 + K_{12} D_2 + K_{13} D_3 + K_{14} D_4 + \dots + K_{1,12} D_{12} = F_1 \\
 &K_{21} D_1 + K_{22} D_2 + K_{23} D_3 + \dots + K_{2,12} D_{12} = F_2 \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 &K_{12,1} D_1 + K_{12,2} D_2 + \dots + K_{12,12} D_{12} = F_{12}
 \end{aligned}
 \tag{1.44-a}$$

Estas relações podem ser expressas pelo produto de matrizes

$$\begin{bmatrix}
 K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1,12} \\
 K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2,12} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 K_{12,1} & K_{12,2} & \dots & K_{12,12}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 D_1 \\
 D_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 D_{12}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 F_1 \\
 F_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 F_{12}
 \end{Bmatrix}
 \tag{1.44-b}$$

ou, de forma condensada

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{F}}
 \tag{1.44-c}$$

Onde:

- $\underline{\underline{K}}$  = matriz de rigidez global
- $\underline{\underline{D}}$  = vetor dos deslocamentos
- $\underline{\underline{F}}$  = vetor das forças aplicadas

Cada termo  $K_{ij}$  da matriz  $\underline{\underline{K}}$  representa:

"Força que deve ser aplicada na direção  $i$  para estabelecer o equilíbrio da estrutura quando  $D_j = 1$  e os outros  $D_n = 0$ ,  $n \neq j$ ". Pelo teorema de Maxwell (vide item 1.8.3), pode-se concluir que  $K_{ij} = K_{ji}$ , isto é, a matriz de rigidez é simétrica.

Assim, a  $i$ -ésima coluna da matriz  $\underline{\underline{K}}$  é o vetor de forças aplicadas nas direções das coordenadas globais para manter o equilíbrio estático da estrutura submetida à configuração de

formada tal que  $D_i = 1$  e os outros  $D_j = 0$ ,  $j \neq i$ .

Como será visto mais tarde, o sistema de equações (1.44) estabelece condições de equilíbrio para a estrutura; cada equação prescreve o equilíbrio na direção de uma determinada coordenada.

Observe que as equações (1.44) englobam os deslocamentos dos apoios (nulos) e as forças (reações) de apoio. As equações de equilíbrio nas direções dos deslocamentos livres e que só têm como incógnitas estes deslocamentos são mostrados abaixo.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} \quad (1.45-a)$$

$$\text{ou,} \quad \underset{\sim}{K}_{\ell\ell} \underset{\sim}{D}_{\ell} = \underset{\sim}{F}_{\ell} \quad (1.45-b)$$

Onde:

- $\underset{\sim}{K}_{\ell\ell}$  = matriz de rigidez livre-livre  
Relaciona força e deslocamentos correspondentes às coordenadas não fixas (livres)
- $\underset{\sim}{D}_{\ell}$  = deslocamentos livres (desconhecidos)  
Também chamados de Graus de Liberdade (GL)
- $\underset{\sim}{F}_{\ell}$  = forças aplicadas livres (conhecidas)

### 1.9.2. Matriz de Rigidez Local

Matriz de rigidez local estabelece relações entre forças e deslocamentos definidos pelas coordenadas locais. Quando estas coordenadas estão descritos no sistema de eixos globais, como na figura 1.34-b, as relações são da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (1.46-a)$$

$$\text{Ou, } \underline{k} \underline{d} = \underline{f} \quad (1.46-b)$$

Onde:

- $\underline{k}$  = matriz de rigidez local (eixos globais)
- $\underline{d}$  = vetor deslocamento nas coordenadas locais (eixos globais)
- $\underline{f}$  = vetor das forças aplicadas à barra nas coordenadas locais. (eixos globais)

Cada termo  $k_{ij}$  da matriz  $\underline{k}$  representa:

"Força que deve ser aplicada à barra na direção  $i$  para estabelecer o equilíbrio desta quando  $d_j = 1$  e os outros  $d_n = 0$ ,  $n \neq j$ , sendo  $k_{ij} = k_{ji}$  (teorema de Maxwell)".

Assim, a  $i$ -ésima coluna da matriz  $\underline{k}$  é o vetor de forças aplicadas à barra nas direções coordenadas locais (eixos globais) para manter o equilíbrio desta quando submetida à configuração deformada tal que  $d_i = 1$  e os outros  $d_j = 0$ ,  $j \neq i$ .

A matriz de rigidez local também pode ser estabelecida para o sistema de eixos locais, como os da figura 1.34-c.

Assim,

$$\begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & k'_{13} & k'_{14} & k'_{15} & k'_{16} \\ k'_{21} & k'_{22} & k'_{23} & k'_{24} & k'_{25} & k'_{26} \\ k'_{31} & k'_{32} & k'_{33} & k'_{34} & k'_{35} & k'_{36} \\ k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & k'_{44} & k'_{45} & k'_{46} \\ k'_{51} & k'_{52} & k'_{53} & k'_{54} & k'_{55} & k'_{56} \\ k'_{61} & k'_{62} & k'_{63} & k'_{64} & k'_{65} & k'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \end{Bmatrix} \quad (1.47-a)$$

$$\text{ou, } \underline{k}' \underline{d}' = \underline{f}' \quad (1.47-b)$$

Onde:

$\underline{k}'$  = matriz de rigidez local (eixos locais)

Esta relação entre forças e deslocamentos nada mais é do que a relação entre tensões e deformações,  $\sigma_{x_1} = E \cdot \epsilon_{x_1}$ , extrapoladas do nível infinitesimal para o nível de coordenadas locais. Esta extrapolação vai ser feita, para cada tipo de elemento estrutural, nos capítulos que se seguem, a exemplo do que foi feito no item 1.8.1.1.

#### 1.10. Representação dos Carregamentos como Cargas Nodais

Na análise estrutural através do método dos deslocamentos as equações de equilíbrio são definidas nas direções das coordenadas, ou melhor, são equações de equilíbrio dos nós da estrutura. Em geral, entretanto, os carregamentos reais não atuam diretamente sobre os nós. Ao invés disso, os carregamentos são divididos em dois tipos:

- cargas nodais
- cargas atuando nas barras (elementos estruturais)

Para fazer a análise, então, estas últimas serão substituídas por forças equivalentes nodais (FEN). Quando estas forças são adicionadas às cargas nodais resultam em cargas nodais combinadas. A estrutura é analisada para estas últimas cargas.

Temos que garantir que o resultado (esforços e deslocamentos) da estrutura analisada pelas cargas nodais combinadas seja igual ao da análise feita para o carregamento real. Isto vai levar à escolha das FEN adequadas.

O princípio da superposição de efeitos demonstrará, a seguir, que as FEN são as forças de engastamento perfeito de cada barra com sentido inverso. Considere o quadro da figura 1.35-  
-a cujo carregamento é dividido em dois casos (I e II).

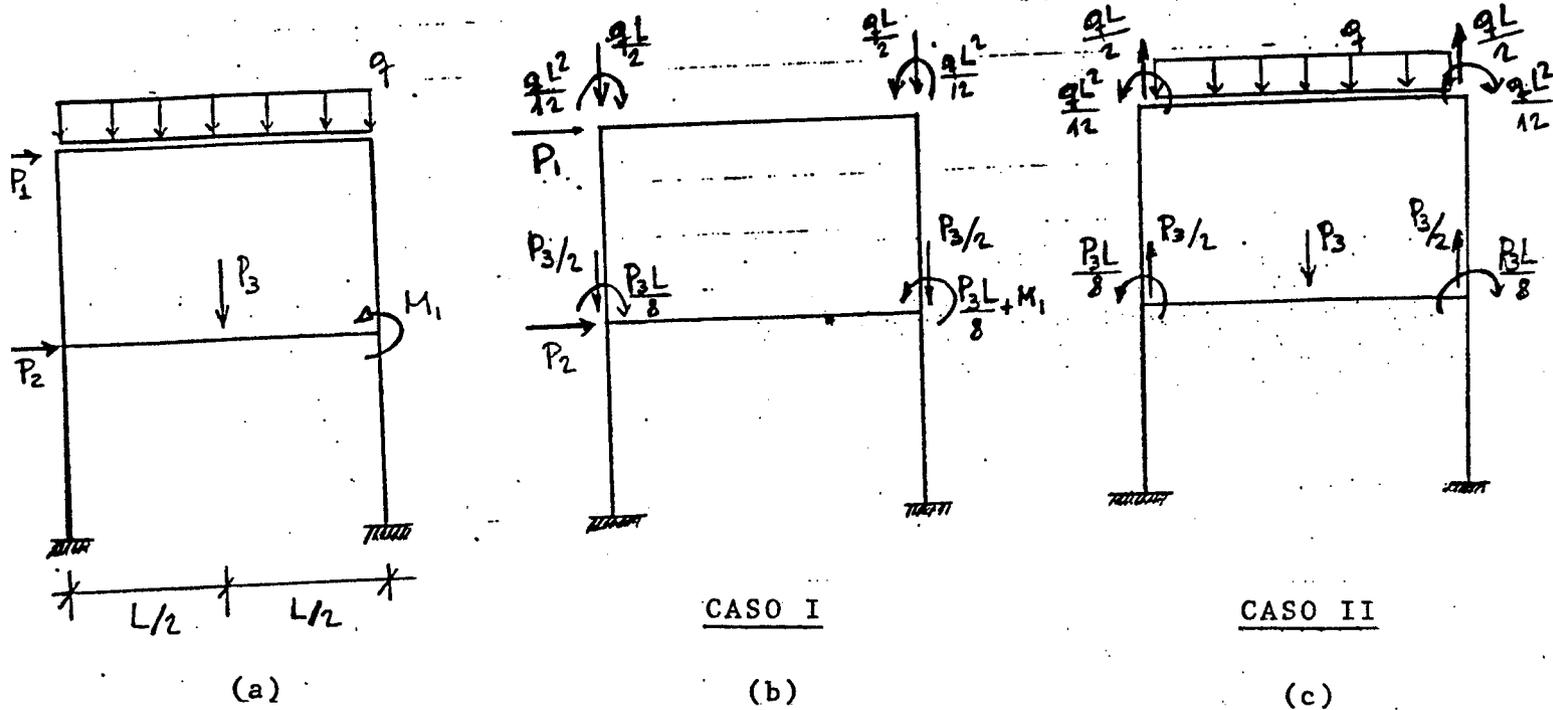


Figura 1.35 - Conversão para Cargas Nodais

Os dois casos de carga da figura 1.35 são definidos como:

- Caso I

Estrutura submetida às forças (e momentos) nodais combinados. Atuam sobre os nós da estrutura. Para este carregamento a estrutura vai ser analisada.

- Caso II

Estrutura submetida às cargas atuando ao longo das barras e às correspondentes reações de engastamento perfeito atuando nas extremidades das barras.

Observe que este carregamento é auto-equilibrado em cada barra, o que resulta em:

1º) Os deslocamentos da estrutura ficam restritos apenas às barras carregadas, sendo que todos os deslocamentos e rotações nodais são nulos (é lógico, são reações de engastamento perfeito).

2º) As reações de apoio são nulas.

A superposição dos efeitos dos CASOS I e II resulta em:

1º) A soma dos carregamentos resulta no carregamento real origi

nal.

- 29) Os deslocamentos nodais do CASO I são iguais aos do carregamento original, visto que os mesmos são nulos no CASO II. Isto é o que se desejava inicialmente para as forças nodais combinadas.
- 39) Os deslocamentos finais ao longo das barras carregadas são obtidos pela soma dos deslocamentos do CASO I (obtidos pela análise) com os do CASO II, que são deslocamentos de barras engastadas.
- 49) Os esforços internos da estrutura são obtidos pela soma dos esforços do CASO I (obtidos pela análise) com os do CASO II (esforços em barras engastadas). Observe, então, que os esforços nas extremidades das barras obtidas pela análise não são, como são os deslocamentos, iguais aos da estrutura com o carregamento original. Esforços nas extremidades das barras são obtidos pela soma dos esforços da análise (CASO I) com as reações de engastamento perfeito (CASO II).
- 59) As reações de apoio do CASO I são iguais às do carregamento original, visto que as mesmas são nulas no CASO II.

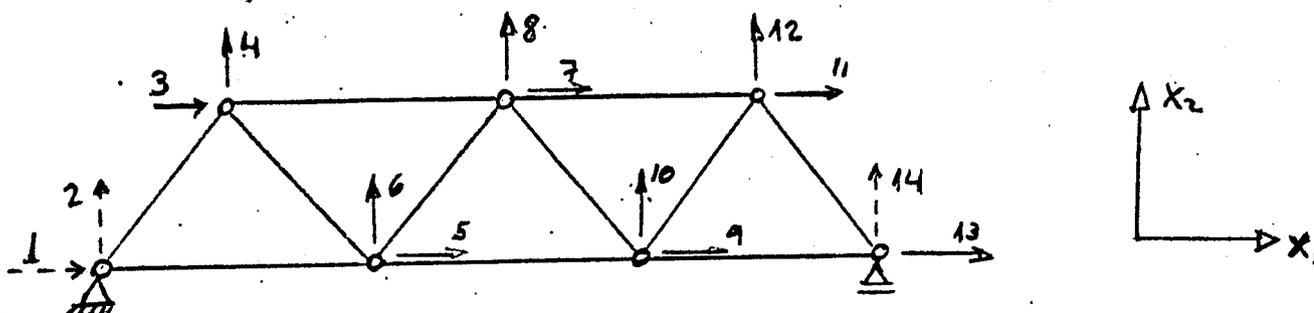
Resumindo, a análise vai ser feita para a estrutura submetida às cargas nodais combinadas, isto é, pelas cargas aplicadas diretamente sobre os nós somadas às cargas equivalentes nodais (reações de engastamento perfeito nas barras, com sentido inverso e atuando sobre os nós). Os deslocamentos nodais são os obtidos pela análise, e os esforços nas extremidades das barras são os da análise somadas às reações de engastamento perfeito.

## 2. MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA PARA TRELIÇAS PLANAS

Treliças são estruturas reticuladas cujas barras trabalham fundamentalmente a esforços axiais de compressão ou tração. O modelo matemático desenvolvido para representar o comportamento das treliças é tal que as junções entre as diversas barras são consideradas perfeitamente articuladas. Vamos também considerar que as forças aplicadas (cargas e reações) atuam nas junções (nós) das barras, exceto para o carregamento de peso próprio. Como as barras são todas articuladas, a flexão devida ao peso próprio de uma barra fica restrita à própria barra. Consideraremos também a possibilidade de variação uniforme de temperatura.

Cada barra é considerada prismática com área,  $A$ , da seção transversal constante e módulo de elasticidade,  $E$ .

Um exemplo de modelo matemático e coordenadas globais para treliça é mostrado abaixo.



### Modelo Matemático e Coordenadas Globais

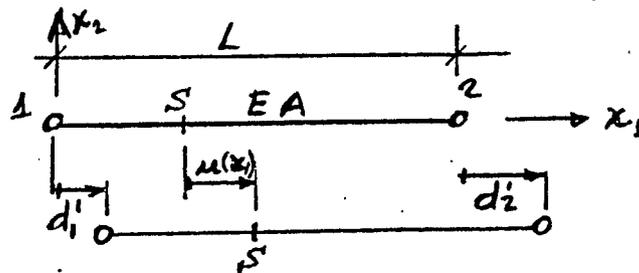
Como as barras da treliça são totalmente articuladas, sua configuração deformada fica definida pelos deslocamentos horizontais e verticais de seus nós no plano. Temos então 2 graus de liberdade por nó e, portanto, a cada nó correspondem somente 2 coordenadas globais.

Isto também pode ser entendido se observarmos que a terceira equação de equilíbrio a momento de cada nó não faz sentido já que não há cargas momento aplicadas nos nós.

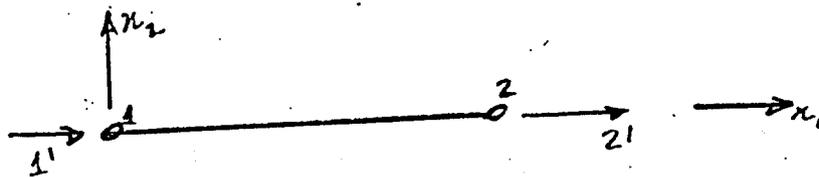
Também <sup>nó</sup>é necessário estabelecer as condições de compatibilidade para rotações dos nós, pois as barras são articuladas.

## 2.1. Matriz de Rigidez do Elemento (barra) de Treliça no Sistema Local

No sistema de eixos locais, a configuração deformada de uma treliça fica definida pelos deslocamentos dos extremos da barra na direção axial, como mostra a figura abaixo.



Assim, no sistema local s̃o existem duas coordenadas: uma na direção axial por extremidade.



A configuração deformada da barra pode ser expressa pelo deslocamento,  $u(x_1)$ , de uma seção genérica  $S$ : As deformações  $\epsilon_a$ , são constantes no interior da barra e iguais a:

$$\epsilon_a = \frac{d_2' - d_1'}{L}$$

Pela equação (1.12)  $\epsilon_a = \frac{du}{dx_1}$

Vemos que  $u(x_1)$  varia linearmente ao longo da barra, e podemos escrever:

$$u(x_1) = \frac{L - x_1}{L} d_1' + \frac{x_1}{L} d_2'$$

ou,

$$u(x_1) = \left( \frac{L - x_1}{L} \quad \frac{x_1}{L} \right) \begin{Bmatrix} d_1' \\ d_2' \end{Bmatrix}$$

ou ainda,  $u(x_1) = ( N_1(x_1) \quad N_2(x_2) ) \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$

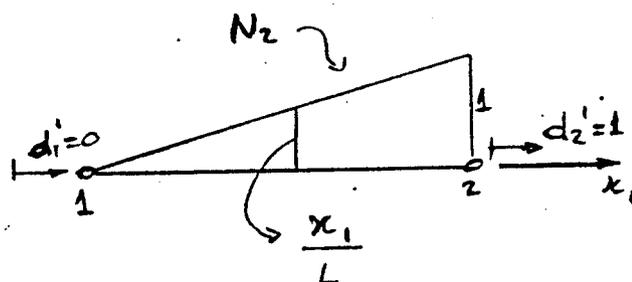
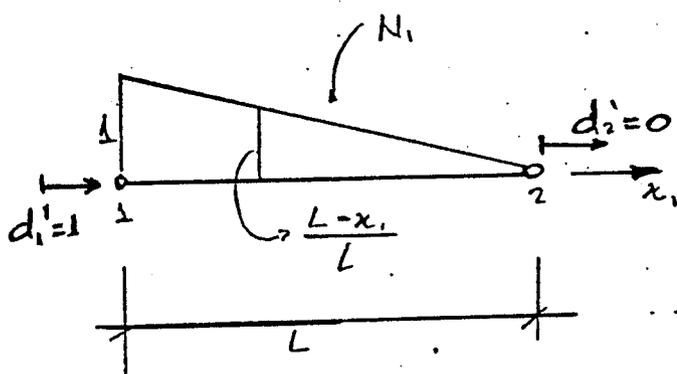
e de forma condensada

$$u(x_1) = \underline{N} \underline{d}'$$

onde  $\underline{N}$  é a matriz (vetor) formado pelas funções de forma  $N_1$  e  $N_2$ :

"Uma função de forma  $N_i$  define os deslocamentos ao longo do elemento (barra) quando o  $i$ -ésimo grau de liberdade  $d_i$  tem valor unitário e os outros são nulos"

As funções de forma  $N_1$  e  $N_2$  são mostrados abaixo.



O nosso interesse está em conhecer as relações que existem entre as forças aplicadas nas direções das coordenadas  $1'$  e  $2'$  e os seus deslocamentos. Estas relações são expressas, no caso, pela matriz de rigidez:

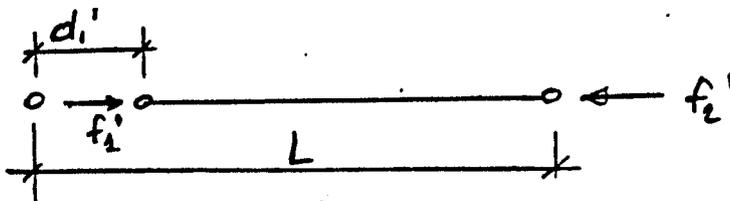
$$\begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \quad \xrightarrow{d_1} \quad 1 \quad \text{---} \quad 2 \quad \xleftarrow{f_2} \quad \xleftarrow{d_2} \\ \circ \quad \quad \quad \circ \end{array}$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{f}' = \underline{k}' \underline{d}'$$

### 2.1.1. Determinação por Aplicação do Equilíbrio Direta mente

Vamos impor  $d_1 \neq 0$  e  $d_2 = 0$  e estudar as condições de equilíbrio.



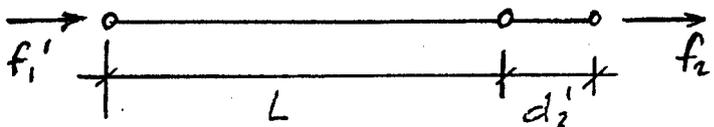
Temos por equilíbrio que  $f_2' = -f_1'$

A relação entre tensões e deformações  $\sigma_{x_1} = E \epsilon_{x_1}$  nos leva a

$$\frac{f_1'}{A} = E \frac{d_1'}{L}, \text{ ou } f_1' = \frac{EA}{L} d_1' \quad \text{e} \quad f_2' = -\frac{EA}{L} d_1'$$

Os dois coeficientes que relacionam  $f_1'$  e  $f_2'$  com  $d_1'$  definem a primeira coluna da matriz  $k'$ .

Para definir a segunda coluna temos:



$$\text{O que resulta em } f_1' = -\frac{EA}{L} d_2' \quad \text{e} \quad f_2' = \frac{EA}{L} d_2'$$

Assim,

$$\begin{Bmatrix} f_1' \\ f_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1' \\ d_2' \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{k}' = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se observarmos a expressão acima veremos que, dado um conjunto de forças  $f_1'$  e  $f_2'$  aplicados à barra, é impossível determinar os deslocamentos  $d_1'$  e  $d_2'$ . Isto porque as duas relações definidas pela matriz de rigidez são linearmente dependentes, ou  $\det \tilde{k}' = 0$ .

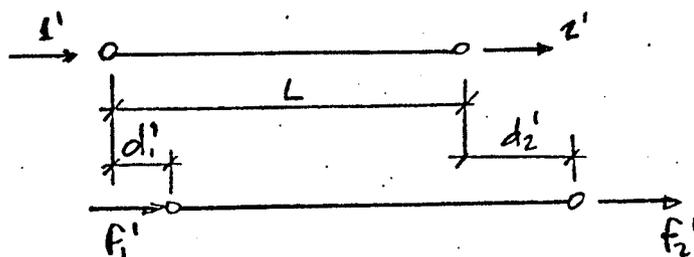
Podemos interpretar fisicamente isto, se notarmos que pode existir um vetor deslocamento  $\underline{d}'$  de corpo rígido (diferente de zero) que não esteja associado a uma configuração de deformação interna para a barra. Isto quer dizer que podem haver deslocamentos sem que haja forças aplicadas; assim

$\tilde{k}' \underline{d}' = \underline{0}$  para  $\underline{d}' \neq \underline{0}$ , sendo  $\underline{d}'$  um vetor deslocamento de corpo rígido. A equação acima comprova que  $\det \tilde{k}' = 0$ .

### 2.1.2. Determinação da Matriz de Rigidez Local por Aplicação do Princípio dos Deslocamentos Virtuais

Esta determinação pode ser feita para cada um dos coeficientes da matriz em separado, a exemplo do que foi feito no item 1.8.1.1, ou pode ser feita de maneira global como mostrado a seguir.

Queremos determinar o conjunto de forças  $f_1'$  e  $f_2'$  que devem ser aplicadas à barra para garantir o equilíbrio desta quando submetida à seguinte configuração deformada:



Isto estabelece o campo de forças reais  $(F, \sigma)$  onde

$$F = \text{forças externas reais } F = \begin{Bmatrix} f_1' \\ f_2' \end{Bmatrix}, F = \underline{\underline{f'}}$$

$$\sigma = \text{tensões internas reais } \sigma = \sigma_{x_1} = E \epsilon_{x_1} = E \frac{du}{dx_1}$$

Sabendo-se que temos  $u(x_1) = N_1 d_1' + N_2 d_2'$ , temos

$$\sigma_{x_1} = E \left( \frac{dN_1}{dx_1} \cdot d_1' + \frac{dN_2}{dx_1} \cdot d_2' \right)$$

$$\text{ou } \sigma_{x_1} = E \begin{pmatrix} \frac{dN_1}{dx_1} & \frac{dN_2}{dx_1} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_1' \\ d_2' \end{Bmatrix} \text{ e } \sigma_{x_1} = E \frac{dN}{dx_1} \cdot d'$$

$$E, \text{ por final } \sigma_{x_1} = E \underline{\underline{B}} d'$$

Onde

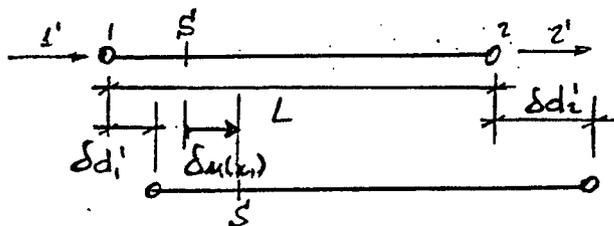
$$\underline{\underline{B}} = \frac{dN}{dx_1} = \begin{pmatrix} \frac{dN_1}{dx_1} & \frac{dN_2}{dx_1} \end{pmatrix} = (N_1' \quad N_2')$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} d' = \epsilon_{x_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_1' \\ d_2' \end{Bmatrix} = \frac{-d_1' + d_2'}{L} \quad (\text{o que é óbvio})$$

A aplicação do princípio dos deslocamentos virtuais vai fornecer as condições de equilíbrio para o campo de forças reais.

Para tal, o campo de deslocamentos  $(\delta D, \delta \epsilon)$  virtuais escolhidos deve satisfazer condições de compatibilidade:



$$\delta D = \text{deslocamentos virtuais} \quad \delta D = \delta u(x_1)$$

$$= \text{deformações virtuais} \quad \delta \epsilon = \delta \epsilon_{x_1} = \frac{d}{dx_1} \delta u \quad (\text{cond. de compatibilidade}).$$

$$\delta \epsilon_{x_1} = \underline{B} \delta \underline{d}' \quad \text{ou} \quad \delta \epsilon_{x_1} = (\delta \underline{d}')^T \cdot \underline{B}^T \quad \delta \epsilon_{x_1} = \frac{-\delta d'_1 + \delta d'_2}{L}$$

O princípio dos deslocamentos virtuais nos diz que

$$\delta W_E = \delta U$$

Onde

$$\delta W_E = \sum \delta D \cdot F \quad \text{e} \quad \delta U = \int_V \delta \epsilon \cdot \sigma \, dV$$

Assim, como sō temos forças externas nas extremidades, temos

$$\delta W_E = (\delta \underline{d}')^T \cdot \underline{f}' = \delta d'_1 f'_1 + \delta d'_2 f'_2$$

$$\delta U = \int_0^L \int_A \delta \epsilon_{x_1} \cdot \sigma_{x_1} \, dA \, dx_1, \quad \text{ou}$$

$$\delta U = \int_0^L \int_A (\delta \underline{d}')^T \cdot \underline{B}^T \cdot E \cdot \underline{B} \cdot \underline{d}' \cdot dA \cdot dx_1$$

$$\text{Logo} \quad \delta U = (\delta \underline{d}')^T \cdot \int_0^L \underline{B}^T \, EA \, \underline{B} \, dx_1 \cdot \underline{d}'$$

Aplicando o princípio temos:

$$(\delta \underline{d}')^T \cdot \underline{f}' = (\delta \underline{d}')^T \cdot \int_0^L \underline{B}^T \, EA \, \underline{B} \, dx_1 \cdot \underline{d}'$$

Como  $\delta d'$  é arbitrário e pode ser diferente de zero, a expressão acima resulta em:

$$\underline{f}' = \int_0^L \underline{B}^T EA \underline{B} dx_1 \cdot \underline{d}', \text{ estabelecendo uma relação entre } \underline{f}' \text{ e } \underline{d}'.$$

Logo, temos  $\underline{f}' = \underline{k}' \underline{d}'$ , onde

$$\underline{k}' = \int_0^L \underline{B}^T EA \cdot \underline{B} dx_1 \quad \text{ou,} \quad \underline{k}' = \int_0^L EA \begin{bmatrix} N_1' & N_1' & N_1' & N_2' \\ N_2' & N_1' & N_2' & N_2' \end{bmatrix} dx_1$$

$$\underline{k}' = EAL \begin{bmatrix} N_1' & N_1' & N_1' & N_2' \\ N_2' & N_1' & N_2' & N_2' \end{bmatrix} \quad \underline{k}' = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A determinação dos coeficientes  $k'_{ij}$  da matriz de rigidez pode ser feita termo a termo, como mostrado a seguir, exemplificado pelo termo  $k'_{12}$ :

Campo de forças reais (F,  $\sigma$ ):

$$(d_1' = 0 \text{ e } d_2' \neq 0)$$

$$F = \begin{Bmatrix} f_1' \\ f_2' \end{Bmatrix} ; \quad \sigma x_1 = E \cdot d_2' \frac{dN_2}{dx_1}$$

Campo de deslocamentos virtuais ( $\delta D, \delta \epsilon$ ):

$$(\delta d_1' \neq 0 \text{ e } \delta d_2' = 0)$$

$$\delta D = \delta u(x_1) = \delta d_1' N_1(x_1) ; \quad \delta \epsilon x_1 = \delta d_1' \cdot \frac{dN_1}{dx_1}$$

Aplicando  $\delta W_E = \delta U$ , temos

$$\delta d_1' \cdot f_1' = \delta d_1' \int_0^L \int_A \frac{dN_1}{dx_1} \cdot F \cdot \frac{dN_2}{dx_1} dA dx_1 d_2'$$

$$\text{Logo, } f_1' = \int_0^L N_1' EA N_2' dx_1 \cdot d_2'$$

$$\text{E assim } k'_{12} = -\frac{EA}{L}$$

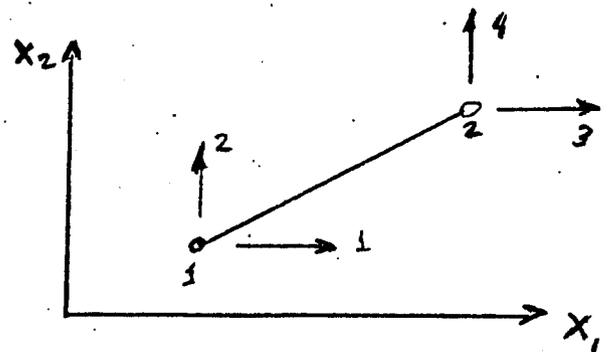
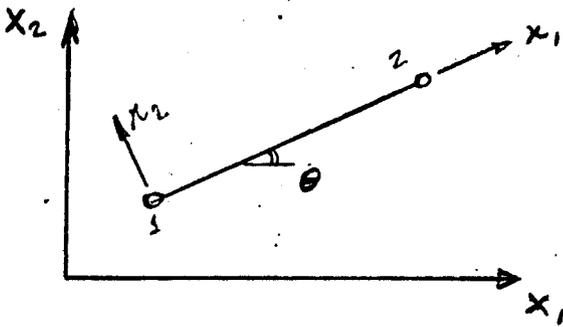
Os outros coeficientes poderiam ser obtidos de forma análoga e assim:

$$f_i^j = \int_0^L \frac{dN_i}{dx_1} \cdot EA \cdot \frac{dN_j}{dx_1} dx_1 \cdot dj \quad e$$

$$k_{ij} = \int_0^L N_i^j EA N_j^j dx_1$$

## 2.2. Matriz de Rigidez do Elemento (barra) de Treliça no Sistema de Eixos Globais

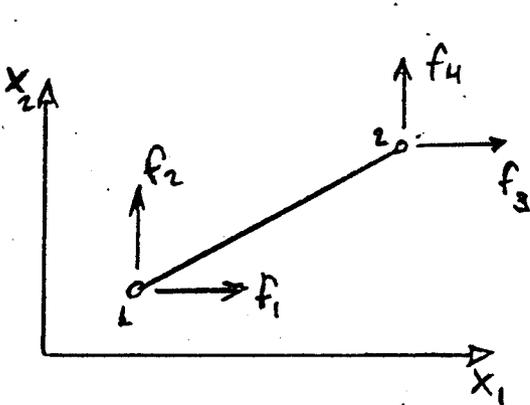
Seja uma barra de treliça com uma inclinação  $\theta$  qualquer em relação aos eixos que definem a estrutura (eixos globais  $X_1$   $X_2$ ).



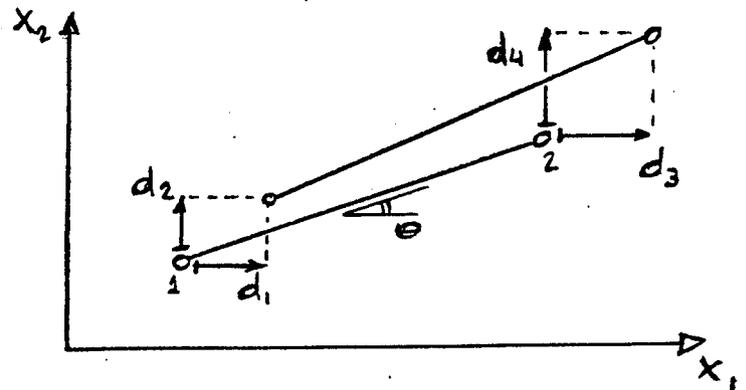
Coordenadas Locais  
Sistema Global

Sendo uma barra de treliça (com articulações perfeitas), a sua configuração deformada fica definida pelos deslocamentos no plano de suas extremidades, resultando em quatro coordenadas locais mostradas acima.

Desejamos conhecer as relações que existem entre as forças e deslocamentos definidos nas coordenadas locais.



Forças Aplicadas à Barra



Deslocamentos dos Extremos  
das Barras

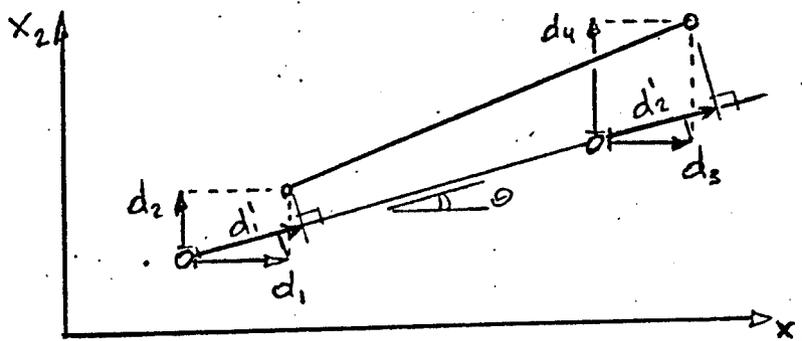
Tal relação é expressa por:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{k}} \underline{\underline{d}}$$

Onde  $\underline{\underline{k}}$  é a matriz de rigidez de barra no sistema global.

### 2.2.1. Determinação da Matriz a Partir de Transformações de Coordenadas

Conhecemos a relação  $\underline{\underline{f}}' = \underline{\underline{k}}' \underline{\underline{d}}'$  para o sistema local e queremos determinar as relações entre  $\underline{\underline{d}}'$  e  $\underline{\underline{d}}$  e entre  $\underline{\underline{f}}$  e  $\underline{\underline{f}}'$ .



Da figura tiramos que

$$d_1' = d_1 \cos\theta + d_2 \operatorname{sen}\theta$$

$$d_2' = d_3 \cos\theta + d_4 \operatorname{sen}\theta$$

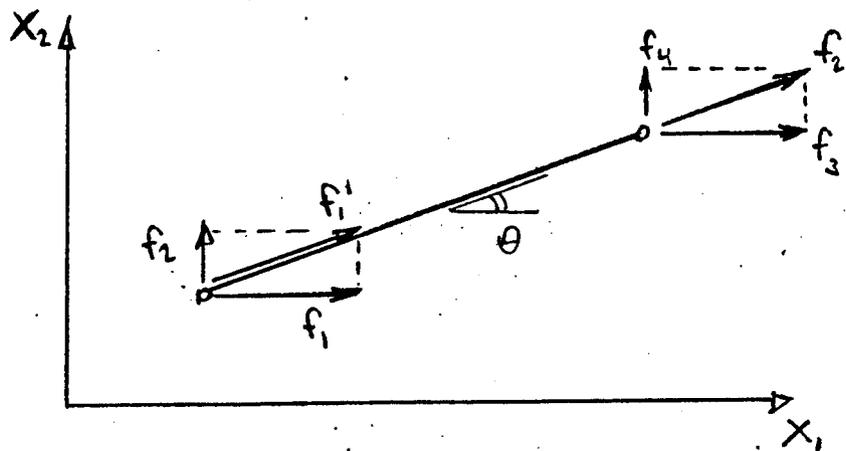
$$\text{Ou} \quad \begin{Bmatrix} d_1' \\ d_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix}$$

$$\text{E, assim} \quad \underline{\underline{d}}' = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{d}}$$

Onde

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

As relações entre  $\underline{f}$  e  $\underline{f}'$  são tiradas da figura abaixo.



Logo

$$\begin{aligned} f_1 &= f'_1 \cos\theta & f_3 &= f'_2 \cos\theta \\ f_2 &= f'_1 \operatorname{sen}\theta & f_4 &= f'_2 \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \quad e$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \end{Bmatrix} \quad E, \text{ assim } \underline{f} = \underline{R}^T \underline{f}'$$

Esta relação também poderia ser determinada utilizando o princípio dos deslocamentos virtuais, como mostrado a seguir.

Dado um mesmo campo de deslocamentos virtuais, o trabalho provocado pelas forças externas não depende do sistema de eixos onde as forças estão definidas. Assim o trabalho das forças no sistema global é igual ao trabalho das forças no sistema local para um campo de deslocamentos virtuais  $\delta \underline{d}' = \underline{R} \delta \underline{d}$ . Logo

$$(\delta \underline{d})^T \underline{f} = (\delta \underline{d}')^T \underline{f}'$$

$$e (\delta \underline{d}')^T = (\delta \underline{d})^T \underline{R}^T \quad . \quad E, \text{ assim } (\delta \underline{d})^T \underline{f} = (\delta \underline{d})^T \underline{R}^T \underline{f}'$$

Como  $(\delta \underline{d})^T$  é arbitrário e pode ser diferente de zero,

temos

$$\underline{f} = \underline{R}^T \underline{f}'$$

A relação que existe entre:

$$\underline{\underline{d}}' = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{d}} \longleftrightarrow \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{f}}'$$

é chamada de Relação de Contragradência.

Agora podemos determinar a matriz de rigidez,  $\underline{\underline{k}}$ , no sistema global em função de  $\underline{\underline{k}}'$  no sistema local.

Partindo de  $\underline{\underline{f}}' = \underline{\underline{k}}' \underline{\underline{d}}'$ , e substituindo  $\underline{\underline{d}}'$  por  $\underline{\underline{R}} \underline{\underline{d}}$  e pre-multiplicando por  $\underline{\underline{R}}^T$ , temos

$$\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{f}}' = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{k}}' \underline{\underline{R}} \underline{\underline{d}} \quad , \quad \text{e assim} \quad \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{k}}' \underline{\underline{R}} \underline{\underline{d}}$$

$$\text{Logo} \quad \underline{\underline{k}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{k}}' \underline{\underline{R}}$$

Definido  $c = \cos\theta$  e  $s = \sin\theta$ , e operando a expressão anterior, temos: (exercício proposto)

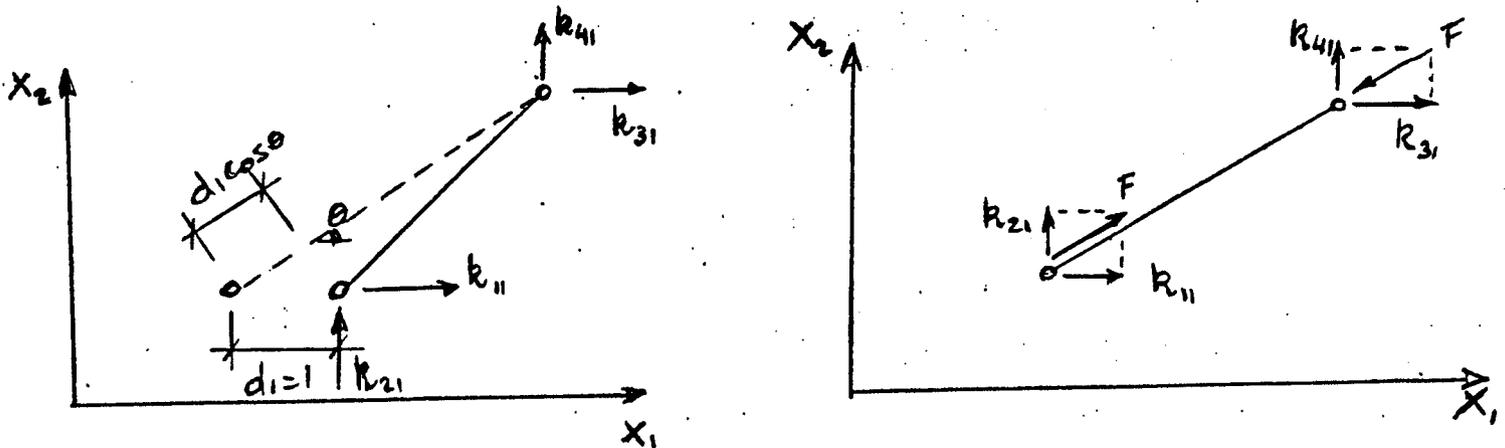
$$\underline{\underline{k}} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Observe que a transformação manteve a simetria da matriz de rigidez.

Observação: A matriz  $\underline{\underline{k}}$  pode ser obtida como mostrada abaixo.

$$\underline{\underline{k}} = \frac{AE}{L} \left\{ \begin{array}{l} -c \\ -s \\ c \\ s \end{array} \right\} \begin{pmatrix} -c & -s & c & s \end{pmatrix}$$

A matriz é determinada coluna por coluna. Começando pela primeira coluna, impõe-se  $d_1 = 1$  e os outros nulos:



Há um encurtamento da barra de  $d_1 \cos \theta$

A força de compressão correspondente é  $F = \frac{AE}{L} d_1 \cos \theta$ .

Para que haja equilíbrio temos que ter:

$$k_{11} = -k_{31} = F \cos \theta$$

$$k_{21} = -k_{41} = F \sin \theta$$

Assim, determinamos a primeira coluna da matriz  $\underline{k}$ :

$$\begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{Bmatrix} \cos^2 \theta \\ \cos \theta \sin \theta \\ -\cos^2 \theta \\ -\cos \theta \sin \theta \end{Bmatrix}$$

Se o mesmo procedimento for feito para os outros graus de liberdade resultará na matriz  $\underline{k}$  mostrada anteriormente.

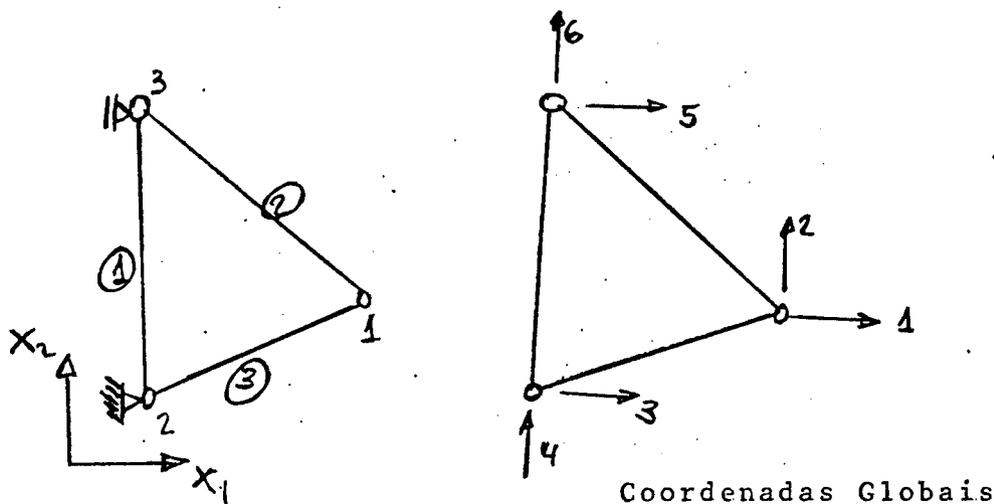
Verifica-se que não foi ainda imposta nenhuma condição quanto aos deslocamentos da barra. Isto quer dizer que ainda pode haver uma configuração de deslocamentos  $\underline{d} \neq \underline{0}$  de corpo rígido tal que não haja deformação interna na barra, o que mostra que não há forças aplicadas ( $\underline{f} = \underline{0}$ ).

Assim  $\underline{k} \underline{d} = \underline{0}$  para  $\underline{d} \neq \underline{0}$ , sendo  $\underline{d}$  deslocamento de corpo rígido.

Isto mostra que a matriz de rigidez  $\underline{k}$  é singular e não pode ser invertida ( $\det \underline{k} = 0$ ).

### 2.3. Matriz de Rigidez Global

No caso da treliça vamos analisar inicialmente a treliça mostrada abaixo:



Graus de liberdade sem considerar as condições de contorno

Vamos em princípio não considerar as condições de contorno, isto é, condições de apoio. Desta forma a configuração de formada da treliça fica definida pelos deslocamentos de seus nós no plano. Temos então 6 coordenadas globais para a treliça.

Queremos estabelecer a relação que existe entre as forças que atuam nas coordenadas globais e os deslocamentos descritos nestas coordenadas. Tal relação é expressa pelas equações a seguir.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} =
 \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix}$$

ou  $\boxed{\underline{K} \underline{D} = \underline{F}}$        $\underline{K} \rightarrow$  Matriz de Rigidez Global

É importante ressaltar que nenhuma condição de contorno (apoio) foi introduzida. Isto quer dizer que pode existir um vetor de deslocamento  $\underline{D}$  de corpo rígido que não esteja associa

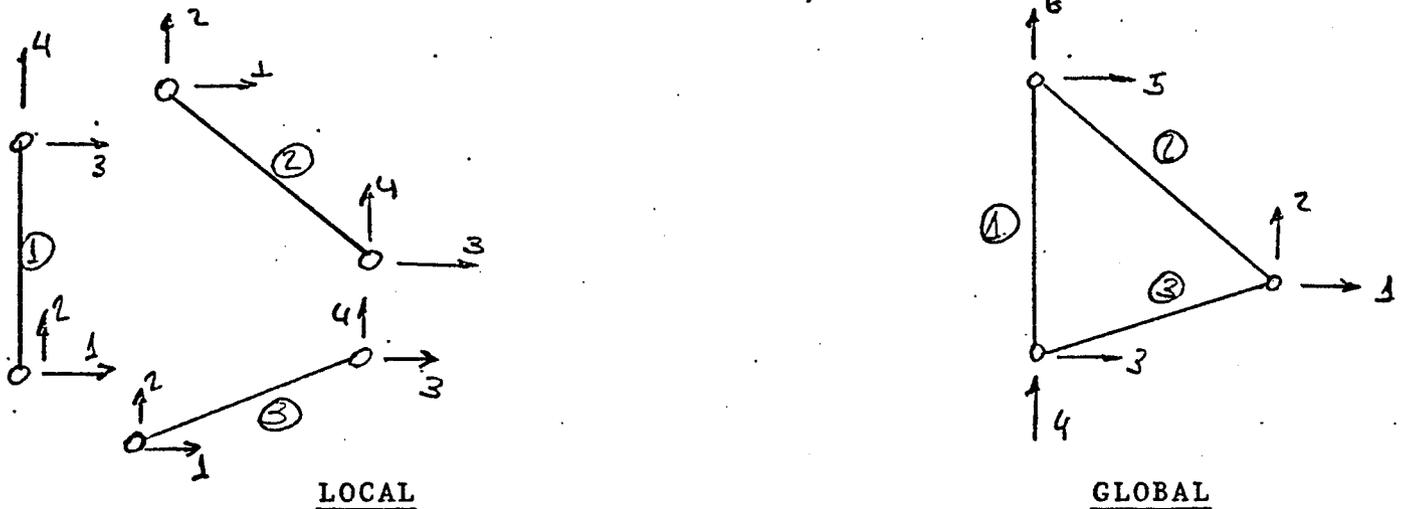
do a uma configuração de deformação interna para a estrutura. E se não há deformação interna é porque a estrutura não está submetida a esforço algum. Tal afirmação pode ser traduzida pela equação a seguir:

$$\underline{K} \underline{D} = \underline{0} \quad \text{sendo } D \neq 0 \text{ e de corpo rígido.}$$

A equação acima mostra que a matriz  $\underline{K}$  é singular e não pode ser invertida ( $\det \underline{K} = 0$ )

Este problema vai ser resolvido quando forem introduzidas as condições de apoio, o que vai ser feito mais tarde no item 2.4.

Para nós estabelecermos as Equações de Compatibilidade de Deslocamentos e Equações de Equilíbrio precisamos definir as coordenadas locais associadas a cada barra separadamente. Assim,



(I) - Equações de Compatibilidade de Deslocamento

$$d_2^2 = d_3^3 = D_1$$

$$d_2^1 = d_3^2 = D_4$$

$$d_4^2 = d_4^3 = D_2$$

$$d_3^1 = d_1^2 = D_5$$

$$d_1^1 = d_1^3 = D_3$$

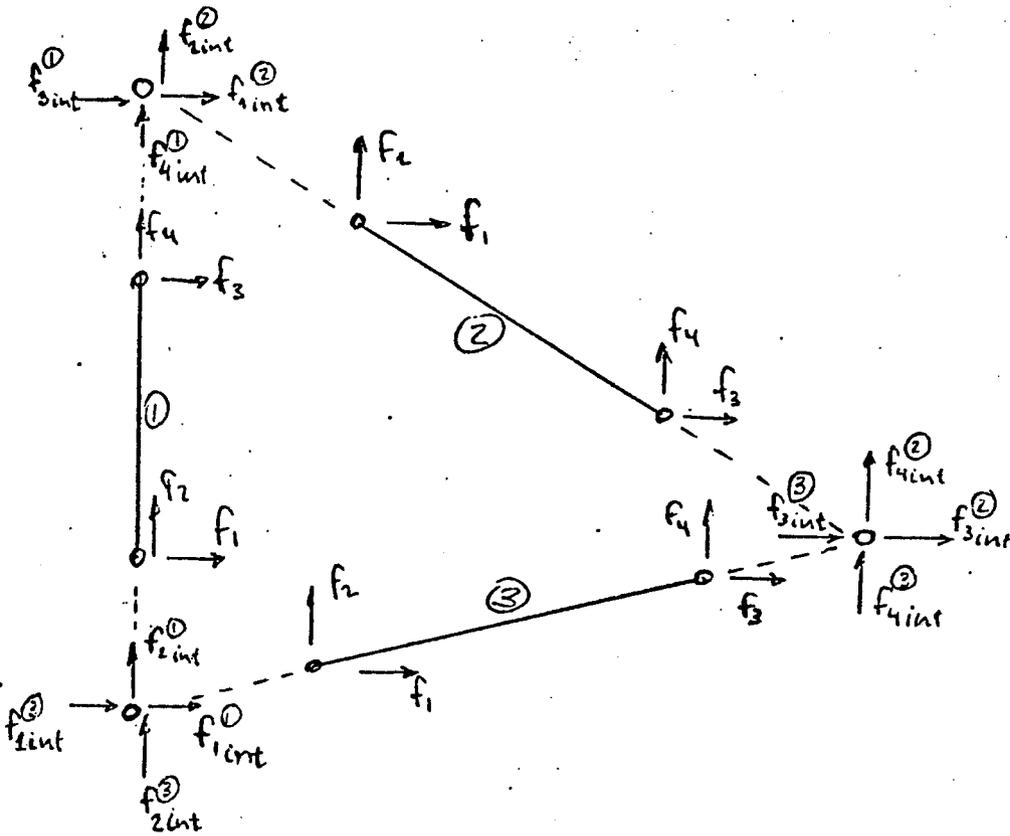
$$d_4^1 = d_2^2 = D_6$$

Tais equações podem ser agrupadas na forma mostrada a seguir:



ra isso, precisamos primeiro considerar as forças  $f_{int}^i$ , de cada barra  $i$ , que atuam sobre os n\u00f3s.

$$f_{int}^i = -k_{d}^i d^i \quad (\text{atuando sobre os n\u00f3s})$$



E transportando para as coordenadas globais,

$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ \text{int} \end{Bmatrix}$	=	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} f_1^{int} \\ f_2^{int} \\ f_3^{int} \\ f_4^{int} \\ f_1^{int} \\ f_2^{int} \\ f_3^{int} \\ f_4^{int} \\ f_1^{int} \\ f_2^{int} \\ f_3^{int} \\ f_4^{int} \end{Bmatrix}$
(6 x 1)		(6 x 12)	

Atuando sobre os n\u00f3s

(12x1)

$$\text{Assim, } \underline{F}_{\text{int}} = \left[ (\underline{A}^1)^T \quad (\underline{A}^2)^T \quad (\underline{A}^3)^T \right] \begin{Bmatrix} \underline{f}_{\text{int}}^1 \\ \underline{f}_{\text{int}}^2 \\ \underline{f}_{\text{int}}^3 \\ \underline{f}_{\text{int}} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Ou } \underline{F}_{\text{int}} = \underline{A}^T \underline{f}_{\text{M}}$$

$$\text{Podemos escrever } \underline{F}_{\text{int}} = \underline{F}_{\text{int}}^1 + \underline{F}_{\text{int}}^2 + \underline{F}_{\text{int}}^3$$

$$\underline{F}_{\text{int}} = \sum_i \underline{F}_{\text{int}}^i$$

Onde:

$$\underline{F}_{\text{int}}^1 = (\underline{A}^1)^T \underline{f}_{\text{int}}^1 \quad \text{contribuição de barra } \underline{1} \text{ nas equações de equilíbrio}$$

$$\underline{F}_{\text{int}}^2 = (\underline{A}^2)^T \underline{f}_{\text{int}}^2 \quad \text{contribuição da barra } \underline{2} \text{ nas equações de equilíbrio}$$

$$\underline{F}_{\text{int}}^3 = (\underline{A}^3)^T \underline{f}_{\text{int}}^3 \quad \text{contribuição da barra } \underline{3} \text{ nas equações de equilíbrio}$$

A relação  $\underline{F}_{\text{int}}^i = (\underline{A}^i)^T \underline{f}_{\text{int}}^i$  também pode ser obtida pelo princípio dos deslocamentos virtuais. Dado um mesmo campo de deslocamentos virtuais,  $\delta \underline{d}^i = \underline{A}^i \delta \underline{D}$ , o trabalho das forças  $\underline{F}_{\text{int}}^i$  definidas nas coordenadas globais é igual ao trabalho das forças  $\underline{f}_{\text{int}}^i$  definidas nas coordenadas locais,

$$(\delta \underline{D})^T \underline{F}_{\text{int}}^i = (\delta \underline{d}^i)^T \underline{f}_{\text{int}}^i \quad \rightarrow \quad (\delta \underline{D})^T \underline{F}_{\text{int}}^i = (\delta \underline{D})^T \cdot (\underline{A}^i)^T \underline{f}_{\text{int}}^i$$

$$\underline{F}_{\text{int}}^i = (\underline{A}^i)^T \underline{f}_{\text{int}}^i$$

A relação entre  $\underline{d}^i = \underline{A}^i \underline{D}$  e  $\underline{F}_{\text{int}}^i = (\underline{A}^i)^T \underline{f}_{\text{int}}^i$  é uma relação de contra-gradiência:

$$\underline{d}_{\text{M}} = \underline{A} \underline{D} \quad \leftrightarrow \quad \underline{F}_{\text{int}} = \underline{A}^T \underline{f}_{\text{M}}$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{d}^1 &= \underline{A}^1 \underline{D} \\ \underline{d}^2 &= \underline{A}^2 \underline{D} \\ \underline{d}^3 &= \underline{A}^3 \underline{D} \end{aligned} \right\} \leftrightarrow \underline{F}_{int} = (\underline{A}^1)^T \underline{f}_{int}^1 + (\underline{A}^2)^T \underline{f}_{int}^2 + (\underline{A}^3)^T \underline{f}_{int}^3$$

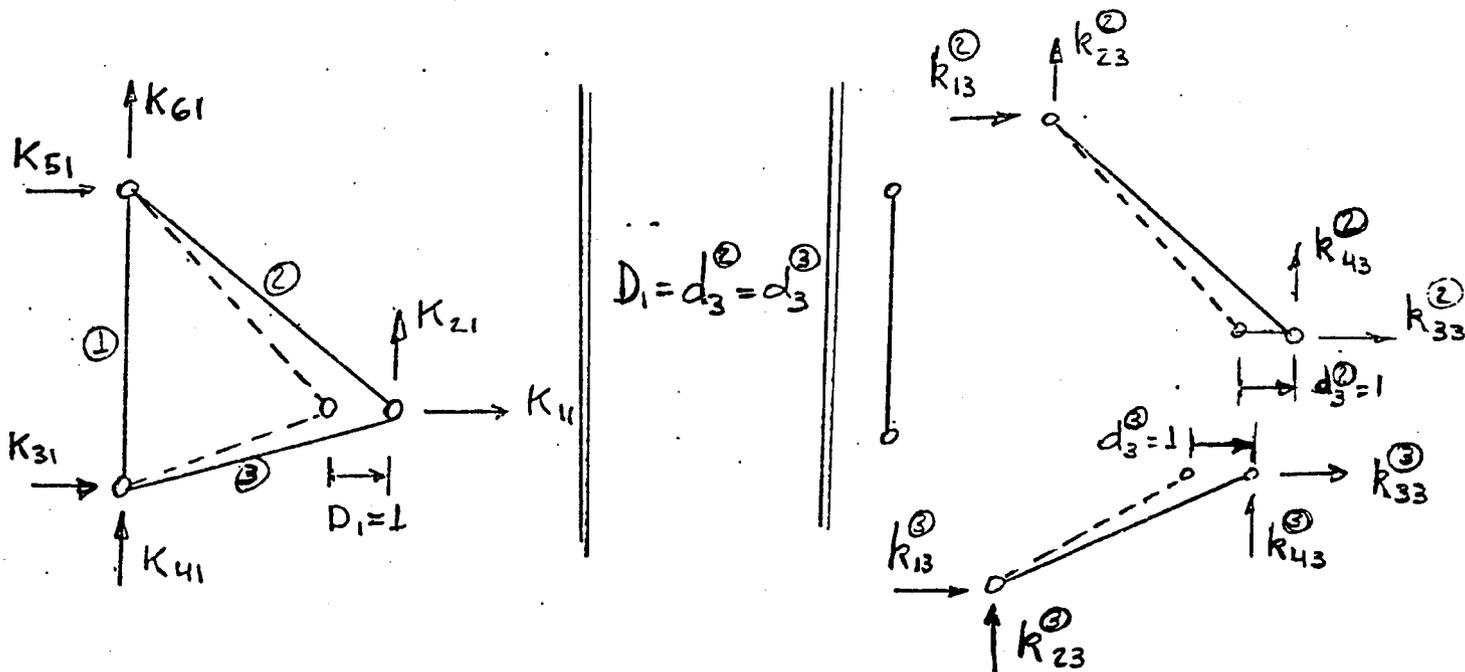
Seguindo o procedimento do Método dos Deslocamentos par-  
tícos das equações de compatibilidade de deslocamentos (I) para as re-  
lações força-deslocamento (II) e daí transportamos as forças pa-  
ra as coordenadas globais (III).

Isto possibilita a determinação da matriz de rigidez  
global, como será mostrado no item 2.3.2. O enfoque mais direto  
será visto no item 2.3.1. que se segue.

As equações de equilíbrio também serão consideradas no  
item 2.3.2.

### 2.3.1. Método da Rigidez Direta

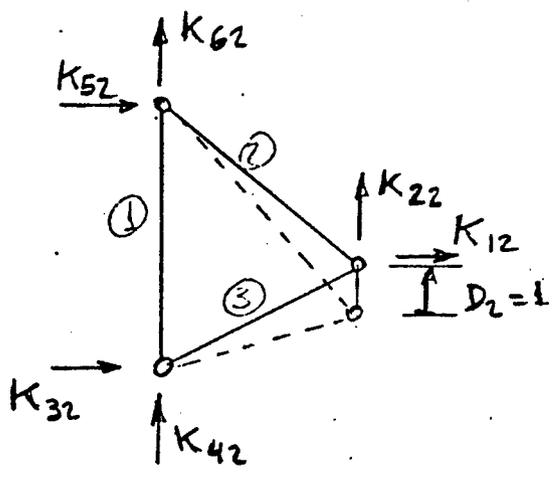
O método da Rigidez Direta nada mais é do que a deter-  
minação dos coeficientes  $K_{ij}$  a partir da aplicação específica  
da sua definição. Assim, por exemplo vamos dar um deslocamento  
 $D_1 = 1$ , e os outros nulos.



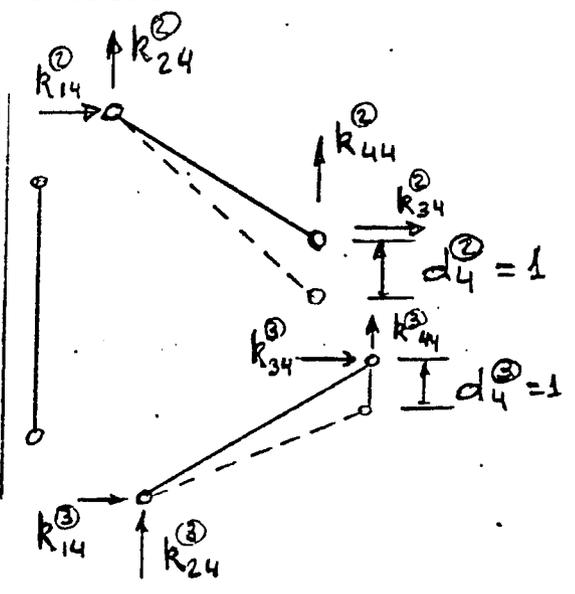
Vemos que:

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= k_{33}^2 + k_{33}^3 & K_{41} &= k_{23}^3 \\
 K_{21} &= k_{43}^2 + k_{43}^3 & K_{51} &= k_{13}^2 \\
 K_{31} &= k_{13}^3 & K_{61} &= k_{23}^2
 \end{aligned}$$

Vamos dar agora  $D_2 = 1$  e os outros nulos



$$D_2 = d_4^{(2)} = d_4^{(3)}$$



Vemos que:

$$\begin{aligned}
 K_{12} &= k_{34}^2 + k_{34}^3 & ; & & K_{22} &= k_{44}^2 + k_{44}^3 & ; & & K_{32} &= k_{14}^3 \\
 K_{42} &= k_{24}^3 & ; & & K_{52} &= k_{14}^2 & ; & & K_{62} &= k_{24}^2
 \end{aligned}$$

O mesmo poderia ser feito para todas as outras deslocabilidades, resultando em:

$k_{33}^2 + k_{23}^3$	$k_{34}^2 + k_{34}^3$	$k_{31}^3$	$k_{32}^3$	$k_{31}^2$	$k_{32}^2$
$k_{43}^2 + k_{43}^3$	$k_{44}^2 + k_{44}^3$	$k_{41}^3$	$k_{42}^3$	$k_{41}^2$	$k_{42}^2$
$k_{13}^3$	$k_{14}^3$	$k_{11}^1 + k_{11}^3$	$k_{12}^1 + k_{12}^3$	$k_{13}^1$	$k_{14}^1$
$k_{23}^3$	$k_{24}^3$	$k_{21}^1 + k_{21}^3$	$k_{22}^1 + k_{22}^3$	$k_{23}^1$	$k_{24}^1$
$k_{13}^2$	$k_{14}^2$	$k_{31}^1$	$k_{32}^1$	$k_{33}^1 + k_{11}^2$	$k_{34}^1 + k_{12}^2$
$k_{23}^2$	$k_{24}^2$	$k_{41}^1$	$k_{42}^1$	$k_{43}^1 + k_{21}^2$	$k_{44}^1 + k_{22}^2$

=  $\tilde{K}$

A obtenção de  $\tilde{K}$  desta maneira pode ser visualizada pela "soma" das contribuições de rigidez de todos os elementos (barras). Tal "soma" nada mais é do que a soma das matrizes de rigidez de cada uma das barras (no sistema de eixos globais) "expandidas" para o tamanho da matriz da estrutura, como esquematizado abaixo:

$$\begin{array}{c}
 \underline{\underline{1}} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\
 \hline
 0 & 0 & k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\
 \hline
 0 & 0 & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\
 \hline
 0 & 0 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \\
 \hline
 \end{array} \\
 \underline{\underline{k}}_E^1 \\
 \\
 \underline{\underline{2}} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 k_{33} & k_{34} & 0 & 0 & k_{31} & k_{32} \\
 \hline
 k_{43} & k_{44} & 0 & 0 & k_{41} & k_{42} \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 k_{13} & k_{14} & 0 & 0 & k_{11} & k_{12} \\
 \hline
 k_{23} & k_{24} & 0 & 0 & k_{21} & k_{22} \\
 \hline
 \end{array} \\
 \underline{\underline{k}}_E^2 \\
 \\
 \underline{\underline{3}} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 k_{33} & k_{34} & k_{31} & k_{32} & 0 & 0 \\
 \hline
 k_{43} & k_{44} & k_{41} & k_{42} & 0 & 0 \\
 \hline
 k_{13} & k_{14} & k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\
 \hline
 k_{23} & k_{24} & k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \underline{\underline{k}}_E^3 \\
 \\
 = \underline{\underline{K}}
 \end{array}$$

Esta "soma" é o que caracteriza o Método da Rigidez Direta.

Convém lembrar que para a obtenção da matriz de Rigidez pelo método da rigidez direta são utilizados condições de compatibilidade de deslocamentos e relações força-deslocamento (dadas na matriz de rigidez de cada barra).

### 2.3.2. Formalização do Método de Rigidez Direta

Substituindo as equações de compatibilidade de deslocamentos (I) vistas anteriormente nas relações força-deslocamento (II), temos:

$$\underline{\underline{d}}^1 = \underline{\underline{A}}^1 \underline{\underline{D}} \quad ; \quad \underline{\underline{d}}^2 = \underline{\underline{A}}^2 \underline{\underline{D}} \quad ; \quad \underline{\underline{d}}^3 = \underline{\underline{A}}^3 \underline{\underline{D}}$$

$$\underline{\underline{f}}^1 = \underline{\underline{k}}^1 \underline{\underline{A}}^1 \underline{\underline{D}} \quad ; \quad \underline{\underline{f}}^2 = \underline{\underline{k}}^2 \underline{\underline{A}}^2 \underline{\underline{D}} \quad ; \quad \underline{\underline{f}}^3 = \underline{\underline{k}}^3 \underline{\underline{A}}^3 \underline{\underline{D}}$$

(forças atuando nas extremidades das barras)

Estas mesmas forças atuando sobre os nós ficam:

$$\underline{f}_{int}^1 = -\underline{k}^1 \underline{A}^1 \underline{D} \quad ; \quad \underline{f}_{int}^2 = -\underline{k}^2 \underline{A}^2 \underline{D} \quad ; \quad \underline{f}_{int}^3 = -\underline{k}^3 \underline{A}^3 \underline{D}$$

O transporte destas forças das coordenadas locais para as globais é dado pelas relações (III)

$$\underline{F}_{int} = (\underline{A}^1)^T \underline{f}_{int}^1 + (\underline{A}^2)^T \underline{f}_{int}^2 + (\underline{A}^3)^T \underline{f}_{int}^3$$

$$\underline{F}_{int} = - \left[ (\underline{A}^1)^T \underline{k}^1 \underline{A}^1 \underline{D} + (\underline{A}^2)^T \underline{k}^2 \underline{A}^2 \underline{D} + (\underline{A}^3)^T \underline{k}^3 \underline{A}^3 \underline{D} \right]$$

$$\text{ou } \underline{F}_{int} = - \left[ (\underline{A}^1)^T \underline{k}^1 \underline{A}^1 + (\underline{A}^2)^T \underline{k}^2 \underline{A}^2 + (\underline{A}^3)^T \underline{k}^3 \underline{A}^3 \right] \underline{D}$$

$\underline{F}_{int}$  é o conjunto de forças das barras atuando sobre os nós, definidas nas coordenadas globais.

Estas forças vão ser equilibradas pelas forças externas,  $\underline{F}_{ext}$ , aplicadas nos nós e definidas nas coordenadas globais. No caso temos

$$\underline{F}_{ext} = \underline{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix}$$

As equações de equilíbrio dos nós nas direções das coordenadas globais são expressas por:

$$\underline{F}_{int} + \underline{F}_{ext} = \underline{0} \quad (\text{IV})$$

Assim,

$$\underline{F} = \left[ (\underline{A}^1)^T \underline{k}^1 \underline{A}^1 + (\underline{A}^2)^T \underline{k}^2 \underline{A}^2 + (\underline{A}^3)^T \underline{k}^3 \underline{A}^3 \right] \underline{D}$$

Ou,  $\underline{F} = \underline{K} \underline{D}$  onde  $\underline{K}$  é a matriz de rigidez global.

Para uma treliça com  $m$  barras:

$$\underline{\underline{K}} = \sum_{i=1}^m (\underline{\underline{A}}^i)^T \underline{\underline{k}}^i \underline{\underline{A}}^i$$

Observe que  $(\underline{\underline{A}}^i)^T \underline{\underline{k}}^i \underline{\underline{A}}^i = \underline{\underline{k}}_E^i$  é a matriz de rigidez da barra  $i$  "expandida" para o tamanho da matriz da estrutura.

### Exercício Proposto

Verificar, para a treliça mostrada anteriormente, se as matrizes  $\underline{\underline{k}}_E^1$ ,  $\underline{\underline{k}}_E^2$ ,  $\underline{\underline{k}}_E^3$  são obtidas a partir da expressão acima.

Observação: Se  $\underline{\underline{k}}_M$  é a matriz mostrada abaixo:

$$\underline{\underline{k}}_M = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \underline{\underline{k}}_{4 \times 4}^1 & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \hline \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{k}}_{4 \times 4}^2 & \underline{\underline{0}} \\ \hline \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{k}}_{4 \times 4}^3 \\ \hline \end{array} \quad (12 \times 12)$$

Podemos escrever:  $\underline{\underline{f}}_M = -\underline{\underline{k}}_M \underline{\underline{d}}_M$  (relações força-desloc.)  
(atuando nos nós)

Assim,  $\underline{\underline{F}}_{int} = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{f}}_M \rightarrow \underline{\underline{F}}_{int} = -\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{k}}_M \underline{\underline{d}}_M$

Sabemos:  $\underline{\underline{d}}_M = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{D}}$  (condições de compatibilidade)

Logo,  $\underline{\underline{F}}_{int} = -\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{k}}_M \underline{\underline{A}} \underline{\underline{D}}$

Equações de Equilíbrio:  $\underline{\underline{F}}_{int} + \underline{\underline{F}}_{ext} = \underline{\underline{0}}$

E, então,  $\underline{\underline{F}}_{ext} = \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{k}}_M \underline{\underline{A}} \underline{\underline{D}}$

Logo  $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{k}}_M \underline{\underline{A}}$

### 2.3.3. Instruções em FORTRAN para Montagem da Matriz K

Na implementação computacional da montagem da matriz de rigidez global não vai se fazer uso da matriz de incidência cinemática  $A$ , embora isto fosse possível.

Vamos utilizar o próprio conceito do método da rigidez direta de somar as contribuições dos coeficientes da matriz de rigidez das barras nos correspondentes coeficientes da matriz de rigidez global.

Para isso, algumas coisas vão ser definidas:

1º) A cada nó correspondem duas equações de equilíbrio, uma para cada coordenada global do nó.

Vamos criar uma matriz que define um número da linha de cada equação de equilíbrio de cada nó. Ou seja,

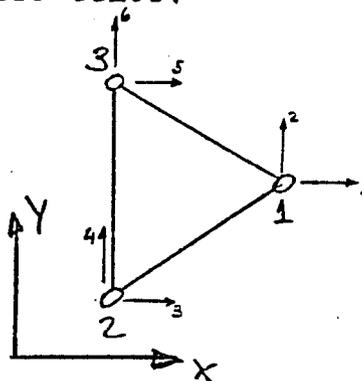
$ID(1,N)$  = número da 1.<sup>a</sup> equação do nó N

$ID(2,N)$  = número da 2.<sup>a</sup> equação do nó N

Assim para o exemplo estudado temos:

$$ID(L,N) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

nºs. das eq. do nó 1    ↑    ↑    ↑  
 nºs. das eq. do nó 2    ↑    ↑    ↑  
 nºs. das eq. do nó 3    ↑    ↑    ↑



No item 2.4.1. veremos como determinar a matriz  $ID(L,N)$

2º) Sem fazer distinção entre grau de liberdade fixo ou livre, isto é, sem considerar as condições de apoio, pode-se observar que para o nó nº  $i$  temos as equações correspondentes às linhas  $2i - 1$  e  $2i$  da matriz  $K$ . Também, neste caso, o número total de equações,  $NEQ$ , é  $2 \times NJ$ , sendo  $NJ$  o número de nós.

Isto vai ser alterado quando considerarmos os apoios no item 2.4.

39) Uma barra ligando os nós I e J terá os coeficientes de sua matriz de rigidez afetando as seguintes linhas e colunas da matriz K:

ID(1,I), ID(2,I), ID(1,J), ID(2,J)

Para entender isto vide a montagem das matrizes de rigidez "expandidas" mostradas no item 2.3.1.

49) A matriz de rigidez é zerada inicialmente e a sua montagem é feita somando-se a contribuição de cada barra em separado aos correspondentes coeficientes.

59) É criado um vetor, LM(L), que define as posições (linha e coluna) da matriz de rigidez global onde serão somados os coeficientes da matriz de rigidez da barra.

Todas estas considerações estão mostradas nas instruções FORTRAN mostradas abaixo. (Vide também fluxograma a seguir).

```

SUBROUTINE STIFF      ← Monta matriz K = S(II,JJ)
C  ZERA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
    DO 10 II = 1,NEQ      ← NEQ = nº de equações
    DO 10 JJ = 1,NEQ
    10 S(II,JJ) = 0
C  LOOP AO LONGO DAS BARRAS PARA SOMA DE CONTRIBUIÇÕES
    DO 30 M = 1,NE      ← NE = nº de barras
    CALL ESTIFF (M)      ← Monta matriz k = SE(I,J)
C  ADICIONA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO A MATRIZ TOTAL
    I = NOD(1,M)        ← Nô inicial
    J = NOD(2,M)        ← Nô final
    LM(1) = ID(1,I)
    LM(2) = ID(2,I)
    LM(3) = ID(1,J)
    LM(4) = ID(2,J)
    DO 20 I = 1,4
    II = LM(I)          ← Posiciona a linha
    DO 20 J = 1,4
    JJ = LM(J)          ← Posiciona a coluna
    20 S(II,JJ) = S(II,JJ) + SE(I,J)

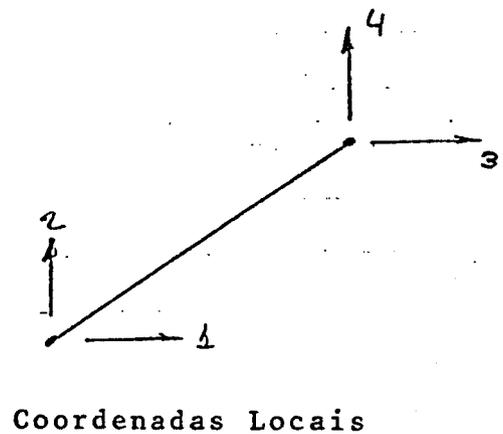
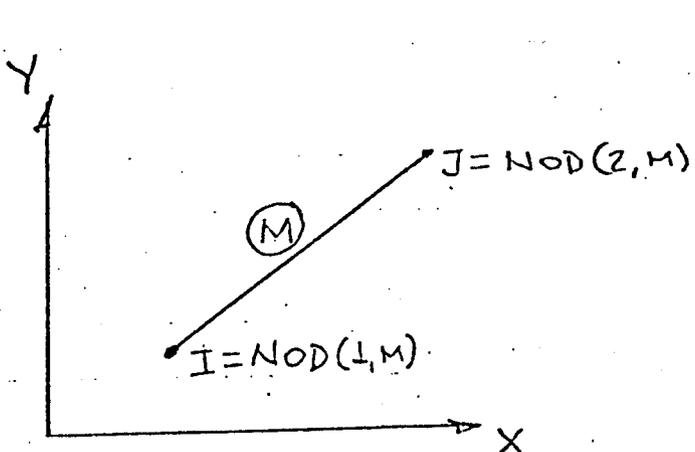
```

30 CONTINUE

RETURN

END

O desenho abaixo mostra esquematicamente o procedimento adotado pela Subrotina STIFF para adicionar a contribuição da matriz de rigidez de uma barra genérica M na matriz de rigidez global.



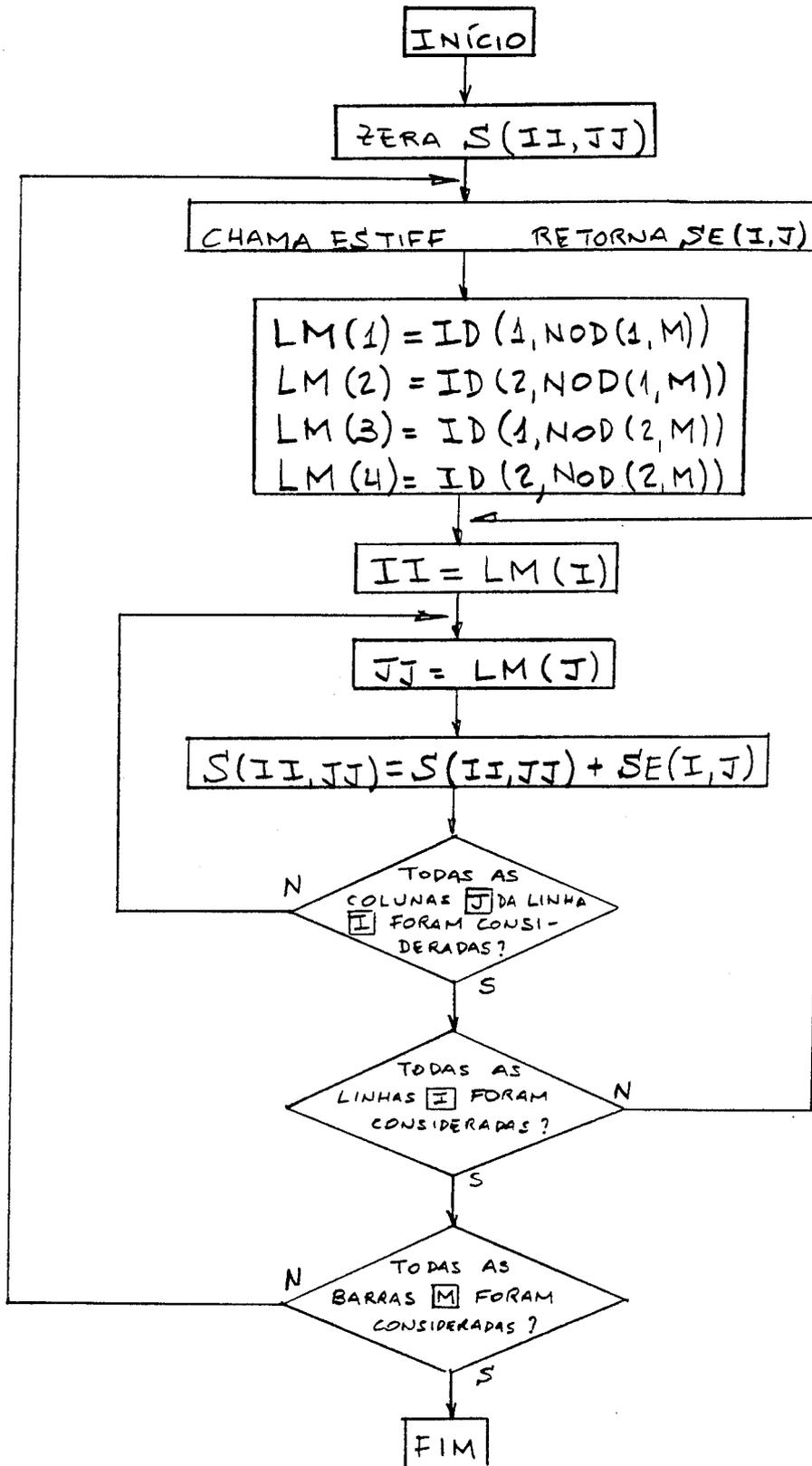
Coordenadas Locais

$\tilde{k} =$

SE(1,1)	SE(1,2)	SE(1,3)	SE(1,4)
SE(2,1)	SE(2,2)	SE(2,3)	SE(2,4)
SE(3,1)	SE(3,2)	SE(3,3)	SE(3,4)
SE(4,1)	SE(4,2)	SE(4,3)	SE(4,4)

Matriz de Rigidez Local

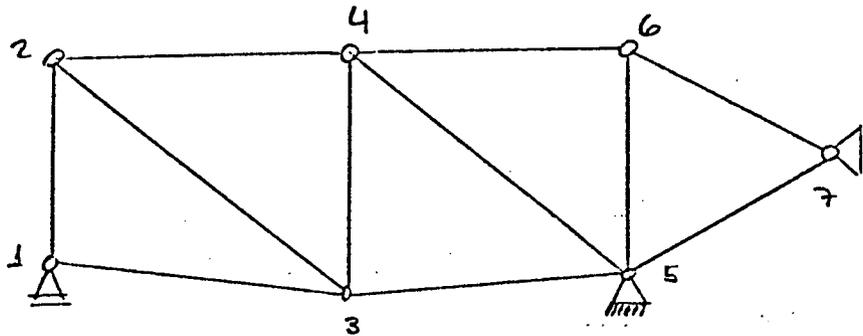
SUBROTINA STIFF (s/condições de apoio)





2.3.4. Numeração dos Nós que Resulta na Matriz em Banda

Vamos considerar a treliça abaixo. A figura em seguida representa a matriz de rigidez global. A matriz foi montada sem distinção entre grau de liberdade de apoio ou livre, isto é, foram consideradas duas equações por nó, colocadas na ordem crescente da numeração dos nós.



	B=6																	
	nó 1	nó 2	nó 3	nó 4	nó 5	nó 6	nó 7											
Nó 1	X	X	0	0	X	X												
Nó 2		X	0	X	X	X	0											
Nó 3			X	X	X	0	0	0										
Nó 4				X	X	0	0	X	X									
Nó 5					X	X	X	X	0									
Nó 6						X	0	X	X	X								
Nó 7										X	X							

X	X	0	0	X	X													
X	0	X	X	X	0													
X	X	X	X	X	0													
X	X	X	0	0	X	X												
X	0	X	X	X	0													
X	X	X	X	X	0													
X	X	X	0	0	X	X												
X	0	X	X	X														
X	X	X	X															
X	X									X	X							
X																		X

MATRIZ SIMÉTRICA

Observa-se que a formação natural da matriz de rigidez faz com que os termos diferentes de zero (representados por "X" na figura) fiquem próximos da diagonal principal, e que fora da faixa central sã existam termos nulos. Diz-se então que a matriz tem a formação "em Banda".

Observa-se que, como a matriz também é simétrica, todas as informações dadas pela matriz de rigidez estão contidas na matriz retangular com número de linhas igual a NEQ e número de colunas igual a B, onde B é chamado de "semi-largura de banda".

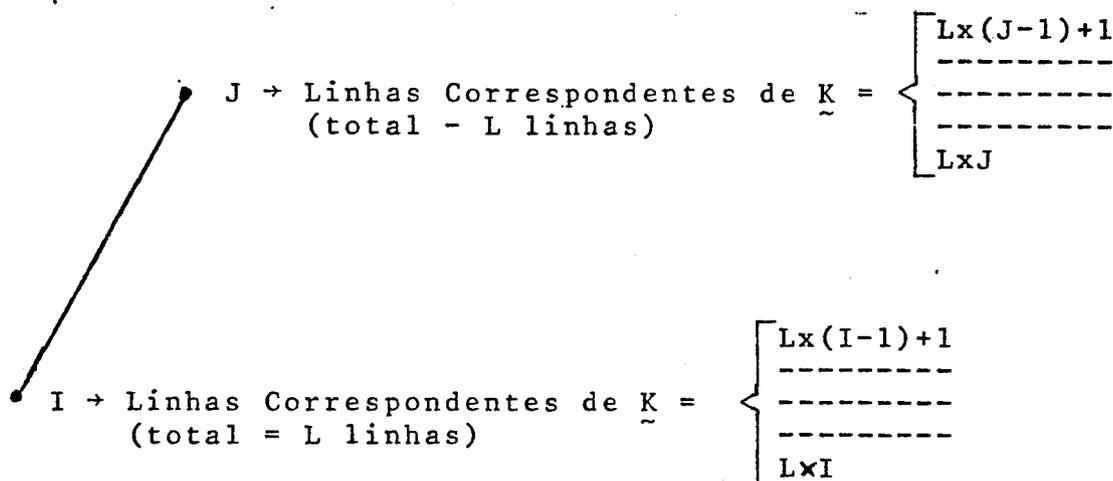
Assim, ao invés de se guardar uma matriz cheia (NEQxNEQ) pode-se guardar a matriz em forma de banda (NEQxB), e economizar em memória de computador.

As seguintes considerações vão ser feitas para a determinação da semi-largura de banda (B):

1º) Seja  $L$  o número de graus de liberdade por nó.

2º) Seja uma barra genérica ligando os nós I e J.

Suponha  $I < J$ .



A linha (ou coluna) de menor numeração que é afetada por um coeficiente de rigidez desta barra é:  $Lx(I-1)+1$ .

A linha (ou coluna) de maior numeração que é afetada por um coeficiente de rigidez desta barra é:  $LxJ$ .

Vemos então que, para esta barra, a maior "distância" de um coeficiente diferente de zero para a diagonal principal é:

$$B = L \times J - [ L \times (I - 1) + 1 ] + 1$$

$$B = L (J - I + 1)$$

3º) A semi-largura de banda  $\bar{e}$  o maior valor de B encontrado ao percorrer todas as barras, ou:

$$B = L \times [ \text{m\`ax} (J - I) + 1 ] \quad (\text{semi-largura de banda})$$

Onde  $[ \text{m\`ax} (J - I) + 1 ]$   $\bar{e}$  chamado de "banda nodal".

4º) Este procedimento n\`ao levou em conta as condi\`oes de apoio.

Com base no que foi visto acima, encontra-se em segui da instru\`oes em FORTRAN para calcular B (treli\`as).

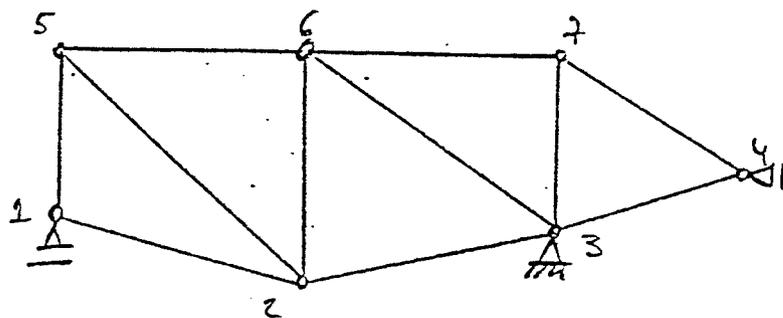
```

NDIF = 0
DO 20 I = 1, NE          + Vai ler incid\`encia de barra a barra
  READ (5,1002) M,NOD(1,M), NOD(2,M)
  KDIF = IABS (NOD(1,M) - NOD(2,M))
  IF (KDIF.GT.NDIF) NDIF = KDIF
20 CONTINUE
MB = 2* (NDIF + 1)

MB → semi-largura de banda
NDIF + 1 → banda nodal

```

Observe pelo exemplo mostrado que se a numera\`ao fosse:



Max Diferen\`a = 4

$$B = (4 + 1) \times 2 = 10$$

Vemos ent\`ao que a numera\`ao dos n\`os influi diretamente na largura de banda.

Deve-se partir com a numera\`ao de um lado para o outro da estrutura e n\`ao ir e retornar de novo.

### 2.3.4.1. Instruções em FORTRAN para Armazenar a Matriz em Banda

```

SUBROUTINE STIFF          ←      Monta K em banda
C  ZERA MATRIZ DE RIGIDEZ
DO 1Ø II = 1,NEQ
DO 1Ø JJ = 1,MB
1Ø S(II,JJ) = Ø.
C  LOOP AO LONGO DAS BARRAS PARA SOMA DE CONTRIBUIÇÕES
DO 3Ø M = 1,NE
C  MONTA MATRIZ DE RIGIDEZ DA BARRA
CALL ESTIFF (M)
C  ADICIONA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO A MATRIZ TOTAL
I = NOD(1,M)
J = NOD(2,M)
LM(1) = ID(1,I)
LM(2) = ID(2,I)
LM(3) = ID(1,J)
LM(4) = ID(2,J)
DO 2Ø I = 1,4
II = LM(I)                ←      Posiciona a linha
DO 2Ø J = 1,4
JJ = LM(J) - II + 1      ←      Posiciona a coluna
IF(JJ.LE.Ø) GO TO 2Ø
S(II,JJ) = S(II,JJ) + SE(I,J)
2Ø CONTINUE
3Ø CONTINUE
RETURN
END

```

$\tilde{k} =$

SE(1,1)	SE(1,2)	SE(1,3)	SE(1,4)
	SE(2,2)	SE(2,3)	SE(2,4)
		SE(3,3)	SE(3,4)
			SE(4,4)

		←————— MB —————→					
		1	2	3	4	5	6
LM(1)	→	SE(1,1)	SE(1,2)			SE(1,3)	SE(1,4)
LM(2)	→	SE(2,2)			SE(2,3)	SE(2,4)	
$\tilde{K} =$							
LM(3)	→	SE(3,3)	SE(3,4)				
LM(4)	→	SE(4,4)					

#### 2.4. Consideração das Condições de Contorno

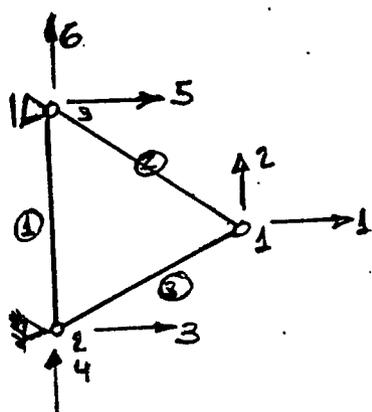
Observamos anteriormente que a matriz de rigidez global, escrita para todos os nós sem preocupação quanto a apoios, é singular. Isto quer dizer que o sistema

$$\tilde{K} \tilde{D} = \tilde{F}$$

não tem solução se não forem suprimidos os movimentos de corpo rígido do vetor  $\tilde{D}$ .

Tais movimentos de corpo rígido são suprimidos ao se impor as condições de contorno em termos de deslocamentos (condições de apoio)

Retomemos, então, a treliça adotada como exemplo:



$$\underline{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} \quad \underline{D} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix}$$

Temos como condição de contorno em termos de deslocamento:

$$D_3 = 0; \quad D_4 = 0; \quad D_5 = 0$$

As condições de contorno em termos de forças são as próprias forças externas aplicadas nos nós

$$F_1; \quad F_2; \quad F_6$$

As forças que faltam  $F_3$ ,  $F_4$  e  $F_5$  são ainda desconhecidas.

Observe que quando um deslocamento  $D_i$  é conhecido a correspondente força  $F_i$  é desconhecida, e vice-versa.

Podemos escrever as equações de equilíbrio da estrutura como mostrado abaixo:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix}$$

Vemos que todos os termos que multiplicam  $D_3$ ,  $D_4$  e  $D_5$  podem ser eliminados pois sempre multiplicam deslocamentos nulos.

Resulta então no sistema abaixo (trocando a 6.<sup>a</sup> linha de ordem)

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{26} \\ K_{61} & K_{62} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{31} & K_{32} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{56} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix}$$

Vemos que o sistema assim dividido resulta em dois sistemas:

- No primeiro temos 3 equações e 3 incógnitas em deslocamento.

Neste sistema a matriz não é mais singular, pois os deslocamentos de corpo rígido foram suprimidos.

- Para o segundo sistema vemos que, com os deslocamentos obtidos no 1º sistema, podemos simplesmente calcular as reações de apoio.

Podemos agora formalizar a consideração das condições de contorno sob uma notação matricial.

O sistema de equações de equilíbrio completo  $\underline{K} \underline{D} = \underline{F}$  pode ser rearranjado, trocando linhas e colunas, de tal modo que as equações de equilíbrio correspondentes aos graus de liberdade com deslocamentos conhecidos fiquem por último. Assim, podemos representar o sistema da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} K_{\lambda\lambda} & K_{\lambda f} \\ K_{f\lambda} & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{\lambda} \\ D_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{\lambda} \\ F_f \end{Bmatrix}$$

Onde:

- índice " $\lambda$ " significa livre
- índice " $f$ " significa fixo
- $D_{\lambda}$  → deslocamento livre (desconhecidos)
- $D_f$  → deslocamento fixo (conhecido)

Em princípio vamos considerar que estes deslocamentos podem ser diferentes de zero (recalques de apoio), embora normalmente eles sejam nulos.

- $\underline{F}_l$  forças conhecidas (vetor de carga)
- $\underline{F}_f$  forças desconhecidas (reações de apoio)

Podemos escrever:

$$\underline{K}_{ll} \underline{D}_l + \underline{K}_{lf} \underline{D}_f = \underline{F}_l \quad (1)$$

$$\underline{K}_{fl} \underline{D}_l + \underline{K}_{ff} \underline{D}_f = \underline{F}_f \quad (2)$$

Do sistema (1) podemos determinar os deslocamentos  $\underline{D}_l$ , já que  $\underline{D}_f$  e  $\underline{F}_l$  são conhecidos a priori:

$$\underline{D}_l = \underline{K}_{ll}^{-1} (\underline{F}_l - \underline{K}_{lf} \underline{D}_f) \quad \text{se } \underline{D}_f = 0 \quad \underline{D}_l = \underline{K}_{ll}^{-1} \underline{F}_l$$

As reações de apoio ficam conhecidas a partir do sistema (2), tendo-se determinado  $\underline{D}_l$

$$\underline{F}_f = \underline{K}_{fl} \underline{D}_l + \underline{K}_{ff} \underline{D}_f$$

Na prática não se trabalha como foi mostrado acima, pois isto envolveria um trabalho computacional muito grande (inversões de matrizes, etc.). Mas aqui foi colocado para dar uma solução formal ao problema.

#### 2.4.1. Instruções em FORTRAN para a Consideração das condições de apoio

O procedimento utilizado consiste em montar a matriz  $ID(L,N)$  que define o número da linha correspondente a cada equação de equilíbrio de cada grau de liberdade. Esta matriz é montada de tal forma que as linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade livres têm numeração menor que as dos graus de liberdade fixos.

Dessa forma, a matriz de rigidez global, quando montada pela maneira descrita no item 2.3.3, naturalmente fica particionada conforme mostrado anteriormente, isto é:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{ll} & \tilde{K}_{lf} \\ \tilde{K}_{fl} & \tilde{K}_{ff} \end{bmatrix}$$

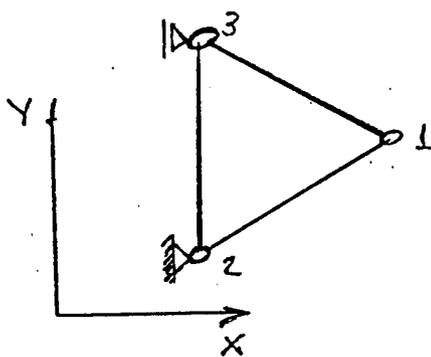
Para montar a matriz  $ID(L,N)$  algumas observações são feitas:

1º) Inicialmente a matriz  $ID(L,N)$  é montada definindo as condições de apoio de cada grau de liberdade de cada nó, tal como mostrado abaixo:

$ID(L,N) = 0 \rightarrow$  grau de liberdade  $L$  do nó  $N$  é livre.

$ID(L,N) = 1 \rightarrow$  grau de liberdade  $L$  do nó  $N$  é fixo.

De tal forma que, para o exemplo em estudo, temos:



$$ID(L,N) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

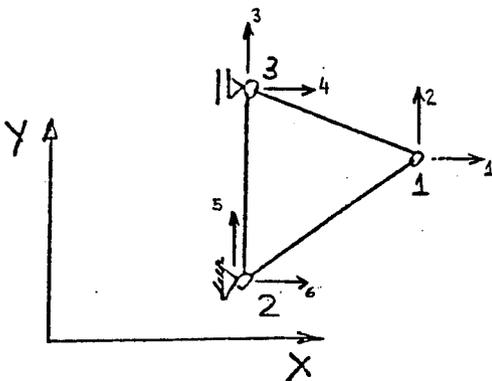
Desloc. X e Y do nó 1 são desconhecidos

Desloc. X e Y do nó 2 são conhecidos

Desloc. X do nó 3 é conhecido.  
Desloc. Y do nó 3 é desconhecido.

2º) As condições de apoio são fornecidas ao programa juntamente com as coordenadas de cada um dos nós.

3º) A matriz  $ID(L,N)$ , a medida que vão sendo lidas as condições de apoio de cada nó, vai se transformando na matriz que identifica o número da linha correspondente a cada grau de liberdade, tal como exemplificado abaixo.



$$ID(L,N) = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Eq. 1  $\rightarrow$  equilíbrio na dir. X do nó 1

Eq. 2  $\rightarrow$  equilíbrio na dir. Y do nó 1

Eq. 3  $\rightarrow$  equilíbrio na dir. Y do nó 3

Eq. 4  $\rightarrow$  equilíbrio na dir. X do nó 3

Eq. 5  $\rightarrow$  equilíbrio na dir. Y do nó 2

Eq. 6  $\rightarrow$  equilíbrio na dir. X do nó 2

4º) No final do processo teremos:

NL = nº de graus de liberdade livres

NF = nº de graus de liberdade fixos

NEQ = NL + NF = nº total de equações

Obs.: Para treliças planas  $NEQ = 2 * NJ$ , sendo  $NJ =$  nº de nós.

Com base no que foi visto acima teremos o seguinte algoritmo:

```

NEQ = 2* NJ
NL = 0
NF = 0
DO 10 I = 1,NJ
  READ (5,1001) N,X(N), Y(N), ID(1,N), ID(2,N)
  DO 5 L = 1,2
    IF (ID(L,N).EQ.1) THEN
      ID (L,N) = NEQ - NF
      NF = NF + 1
    ELSE
      NL = NL + 1
      ID(L,N) = NL
    END IF
  5 CONTINUE
10 CONTINUE

```

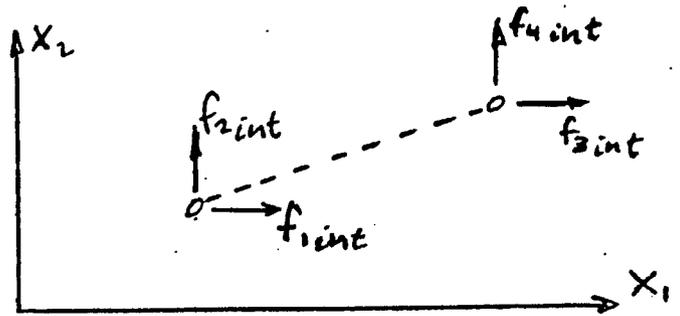
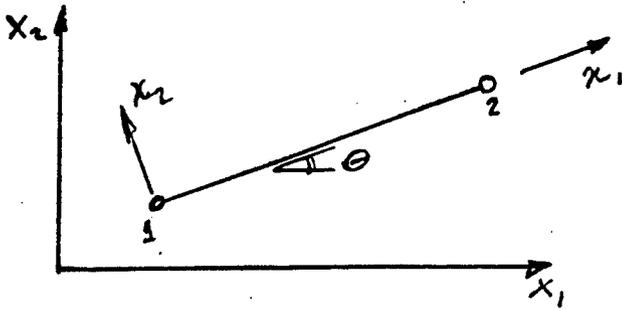
## 2.5. Obtenção do Vetor de Cargas $\underline{F}$

Como dissemos anteriormente, além das cargas atuando nos nós da treliça consideraremos o peso próprio das barras e a possibilidade de variação uniforme de temperatura. Estas duas últimas solicitações serão substituídas, na análise, por forças equivalentes nodais tal como descrito no item 1.10.

Desta forma, existem dois tipos de forças que atuam nos nós:

- Forças aplicadas nos nós pelos elementos (barras):  $\underline{F}_{int}$
- Forças externas atuando diretamente sobre os nós:  $\underline{F}_{ext}$

As forças internas  $\underline{F}_{int}$  incluem as forças vindas das barras devidas aos deslocamentos (a priori desconhecidos), chamadas de  $-\underline{k} \underline{d}$ , e as forças equivalentes nodais, para cada barra chamadas de  $\underline{f}_{E}$ . Para a obtenção da matriz de rigidez,  $\underline{K}$ , esta última parcela não aparecia. Considere a barra mostrada abaixo:



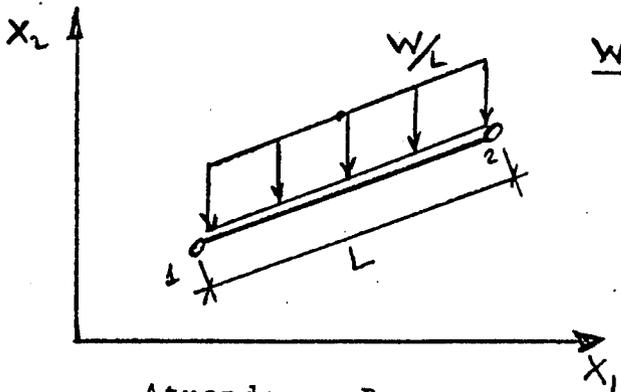
Forças Nodais Internas da Barra

As forças  $f_{int}$  de cada barra (atuando nos nós) vão formar o vetor  $\underline{F}_{int}$  e são compostas por três parcelas:

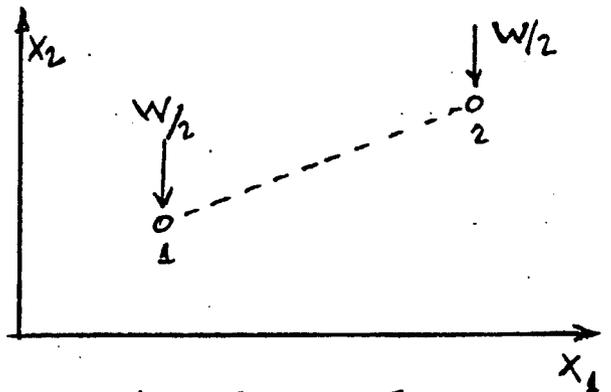
- $-k \underline{d}$  devido aos deslocamentos
- $\underline{f}_E$  devido ao peso próprio

$\gamma \rightarrow$  peso específico

$A \rightarrow$  área seção transversal



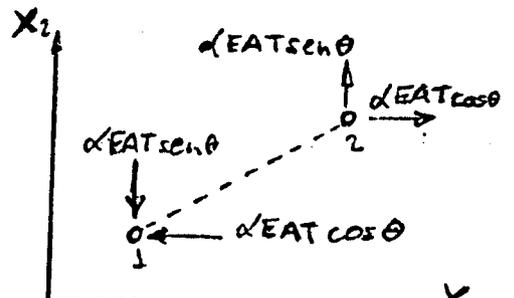
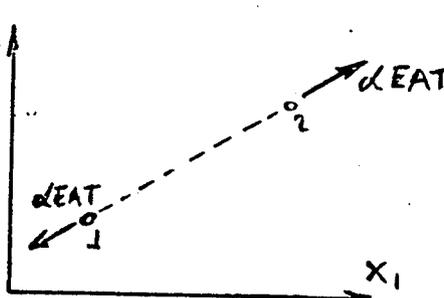
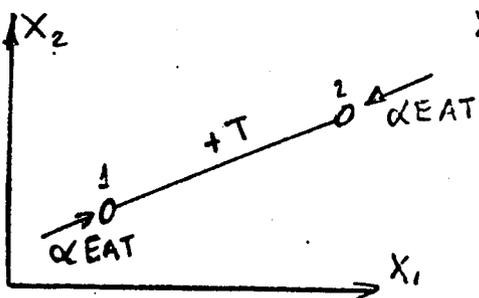
$W = \gamma AL$



Atuando na Barra

Atuando nos Nós

-  $\underline{f}_e$  devido a variação uniforme de temperatura, T



Reações de Engastamento Atuando na Barra

Forças Equiv. Nodais Sistema Local

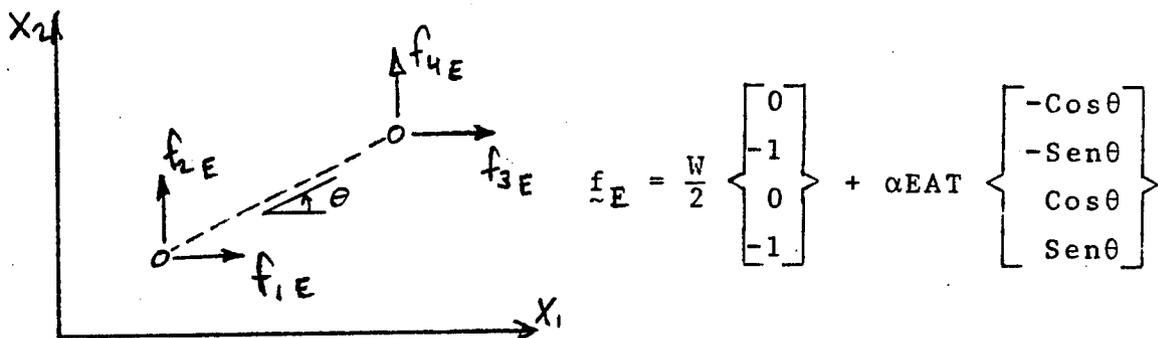
Forças Equiv. Nodais Sistema Global

Sendo,

$\alpha$  = coeficiente de dilatação térmica

$E$  = módulo de elasticidade

O vetor de forças equivalentes nodais  $\underline{f}_E$  considerando os efeitos de peso próprio e temperatura resultará em:



Forças Equivalentes Nodais

As forças nodais internas da barra,  $\underline{f}_{int}$ , são agora definidas por:

$$\underline{f}_{int} = -k \underline{d} + \underline{f}_E$$

O vetor de forças internas aplicadas nos nós pelas barras,  $\underline{F}_{int}$ , é obtido pelo transporte das forças  $\underline{f}_{int}$  das coordenadas locais para as globais. Como visto no item 2.3, temos:

$$\underline{F}_{int} = \sum_i (\underline{A}^i)^T \underline{f}_{int}^i$$

Sendo  $\underline{A}^i$  a matriz de incidência cinemática da barra  $i$ .

O vetor de cargas  $\underline{F}$  é obtido em função das forças externas aplicadas,  $\underline{F}_{ext}$ , e das forças equivalentes nodais  $\underline{f}_E$ , como é mostrado a seguir.

Seguindo o procedimento do método dos deslocamentos visto no item 2.3, temos:

- Condições de compatibilidade de deslocamentos

$$\underline{d}^i = \underline{A}^i \underline{D} \rightarrow \underline{f}_{int}^i = -\underline{k}^i \underline{A}^i \underline{D} + \underline{f}_E^i$$

- Transporte das forças nas coordenadas locais para globais

$$\underline{F}_{int} = \sum_i (\underline{A}^i)^T \underline{f}_{inf}^i$$

- Equações finais de equilíbrio

$$\underline{F}_{ext} + \underline{F}_{int} = \underline{0}$$

$$\rightarrow \underline{F}_{ext} + \sum_i (\underline{A}^i)^T \cdot (k^i \underline{A}^i \underline{D} + \underline{f}_E^i) = \underline{0}$$

E assim,

$$\sum_i (\underline{A}^i)^T k^i \underline{A}^i \underline{D} = \underline{F}_{ext} + \sum_i (\underline{A}^i)^T \underline{f}_E^i$$

$$\text{Ou, } \underline{K} \underline{D} = \underline{F}$$

$$\text{Onde } \underline{K} = \sum_i (\underline{A}^i)^T \cdot k^i \underline{A}^i \text{ (matriz de rigidez global)}$$

$\underline{D}$  = vetor dos deslocamentos

$$\underline{F} = \underline{F}_{ext} + \sum_i (\underline{A}^i)^T \underline{f}_E^i \quad (\text{vetor de cargas})$$

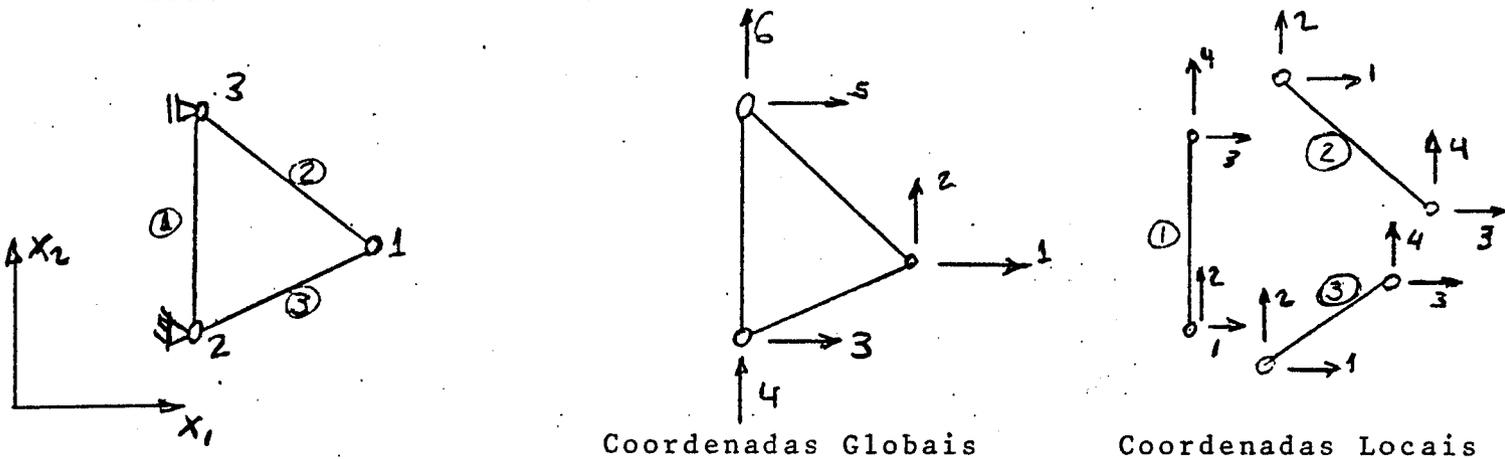
2.6. Determinação dos Deslocamentos

A determinação dos deslocamentos livres segue o procedimento mostrado no item 2.4, isto é, o vetor  $\underline{D}_l$  é obtido resolvendo-se o sistema de equações mostrado abaixo:

$$\underline{K}_{ll} \underline{D}_l = \underline{F}_l - \underline{K}_{lf} \underline{D}_f$$

2.7. Esforços nas Barras

Voltando ao exemplo da treliça começado no item 2.3 temos:



O sistema de equação para a determinação dos deslocamentos desconhecidos é (vide item 2.4):

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{26} \\ K_{61} & K_{62} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_6 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_6 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo-se este sistema de equações chegamos aos valores de  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_6$ . Pode-se então remontar o vetor de deslocamentos  $\underline{D}$ .

$$\underline{D} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 = 0 \\ D_4 = 0 \\ D_5 = 0 \\ D_6 \end{Bmatrix}$$

Generalizando para qualquer estrutura, os deslocamentos desconhecidos ficam determinados a partir da equação (vide item 2.4)

$$\underline{K}_{ll} \underline{D}_l + \underline{K}_{lf} \underline{D}_f = \underline{F}_l$$

$\underline{D}_l$  → deslocamentos livres (desconhecidos)

$\underline{D}_f$  → deslocamentos fixos (conhecidos)

Pode-se, depois de determinado  $\underline{D}_l$ , remontar o vetor de deslocamento completo:

$$\underline{D} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{D}_l \\ \underline{D}_f \end{array} \right\}$$

A partir de  $\underline{D}$  podemos conhecer os deslocamentos dos extremos de todas as barras através das condições de compatibilidade de deslocamentos:

<u>Barra 1</u>	<u>Barra 2</u>	<u>Barra 3</u>	<u>Para uma barra i</u>
$d_1 = D_3$	$d_1 = D_5$	$d_1 = D_3$	$\underline{d}^i = \underline{A}^i \underline{D}$
$d_2 = D_4$	$d_2 = D_6$	$d_2 = D_4$	
$d_3 = D_5$	$d_3 = D_1$	$d_3 = D_1$	$\underline{A}^i$ → matriz de incidência cinemática da barra <u>i</u>
$d_4 = D_6$	$d_4 = D_2$	$d_4 = D_2$	

Conhecendo-se os deslocamentos extremos  $\underline{d}$  de cada barra pode-se determinar os esforços na barra. Isto é mostrado a seguir.

### 2.7.1. Determinação dos Esforços Utilizando a Matriz de Rigidez $\underline{k}$ da barra

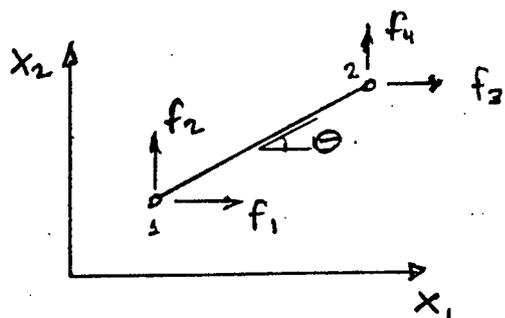
O caminho mais natural para determinar os esforços na barra depois de conhecidos os deslocamentos de sua extremidade é utilizando a matriz de rigidez da barra  $\underline{k}$ . Os esforços são tanto provenientes dos deslocamentos da extremidade (CASO I do item 1.10) quanto das forças atuando no interior das barras e as correspondentes reações de engastamento (CASO II do item 1.10).

Assim, as forças finais atuantes nas extremidades das barras são:

$$\underline{f} = \underline{k} \underline{d} - \underline{f}_E$$

Onde  $\underline{f}_E$  = forças equivalentes nodais = (-1)x forças de engastamento perfeito.

Estas forças são descritas no sistema de eixos globais, como mostradas abaixo.



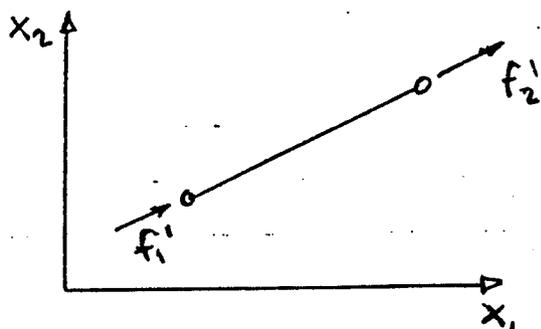
$$\begin{aligned} \cos\theta &= c \\ \sin\theta &= s \end{aligned}$$

Onde (vide itens 2.2 e 2.5):

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} + \underbrace{\alpha EAT \begin{Bmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{Bmatrix}}_{-\underline{f}_E} + \frac{W}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Observação: Resolvendo por computador, a matriz de rigidez  $k$  da barra poderia ter sido guardada quando da de terminação da matriz de rigidez global (subrotina STIFF), ou pode ser recalculada agora.

Os esforços normais nas extremidades da barra ficam de terminadas pelas projeções destas forças na direção axial da barra.

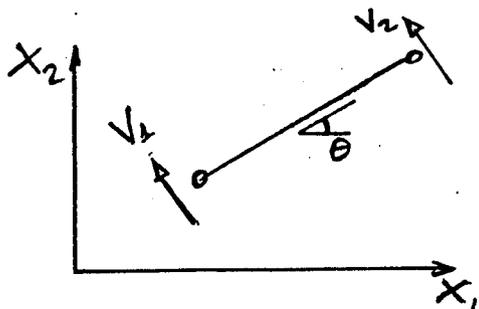


$$\begin{aligned} f'_1 &= f_1 \cos\theta + f_2 \sin\theta \\ f'_2 &= f_3 \cos\theta + f_4 \sin\theta \end{aligned}$$

ou  $\begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$

$$\underline{f}' = \underline{R} \underline{f}$$

Observe que também aparecem esforços nas direções transversais (cortantes) à da barra. Estes esforços são obtidos pelas projeções das forças nas extremidades na direção transversal.



$$V_1 = -f_1 \operatorname{sen} \theta + f_2 \operatorname{cos} \theta$$

$$V_2 = -f_3 \operatorname{sen} \theta + f_4 \operatorname{cos} \theta$$

É de se esperar que somente o efeito de peso próprio provoque esforço cortante. Isto pode ser verificado calculando-se  $V_1$  e  $V_2$  pelas expressões acima (exercício proposto). Chega-se a:

$$V_1 = V_2 = \frac{W}{2} \operatorname{cos} \theta \quad \text{sendo } \underline{W} \text{ o peso total da barra}$$

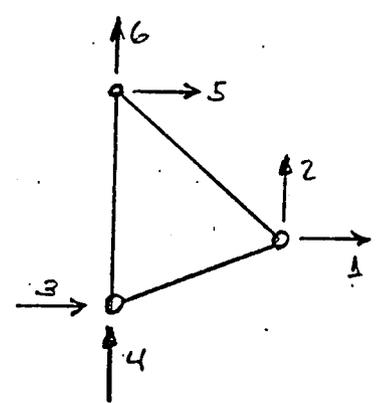
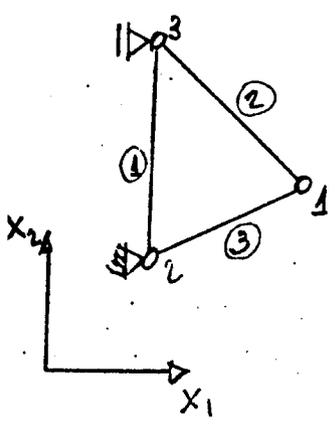
Seguindo o procedimento mostrado no item 2.4 o sistema de equações  $\underline{K} \underline{D} = \underline{F}$  é subdividido em dois sistemas:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{ll} & \underline{K}_{lf} \\ \underline{K}_{fl} & \underline{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{D}_l \\ \underline{D}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_l \\ \underline{F}_f \end{Bmatrix} \quad (1)$$

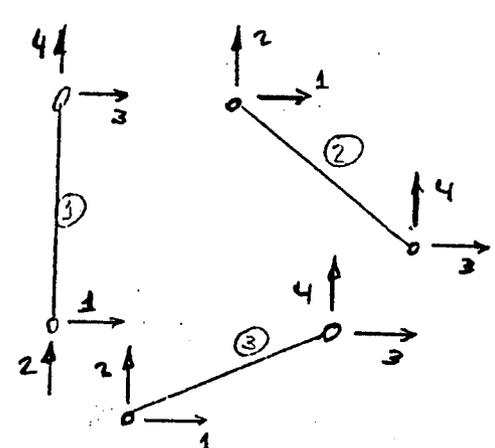
$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{ll} & \underline{K}_{lf} \\ \underline{K}_{fl} & \underline{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{D}_l \\ \underline{D}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_l \\ \underline{F}_f \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Do sistema (1) determinamos  $\underline{D}_l$ , e que substituído no sistema (2) possibilita determinar  $\underline{F}_f$ , que são as reações de apoio.

Assim, para o exemplo utilizando, onde  $\underline{D}_f = \underline{0}$ , temos:



Coordenadas Globais



Coordenadas Locais

SISTEMA (1) Determina  $\underline{D}_l$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_6 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_6 \end{Bmatrix}$$

SISTEMA (2) Determina  $\underline{F}_f$  (reações)

$$\begin{bmatrix} K_{31} & K_{32} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{56} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix}$$

Chega-se, então, ao valor das reações.

### 3. MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA PARA QUADROS PLANOS

A análise dos quadros planos aqui tratada está sujeita às seguintes hipóteses básicas:

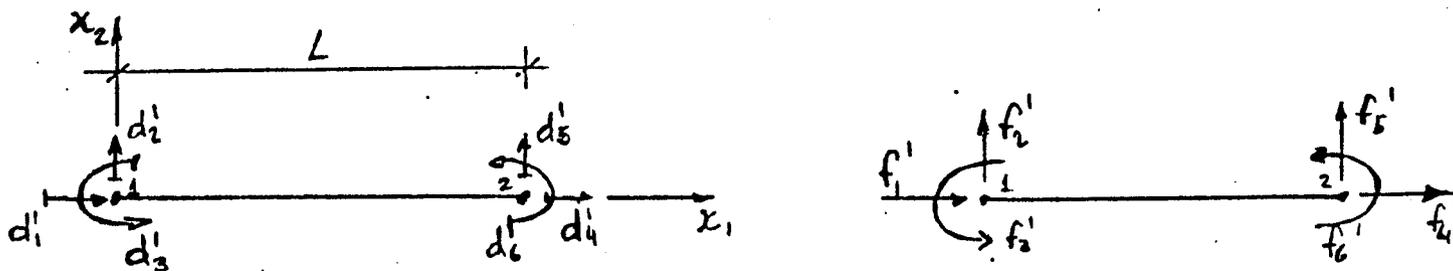
- o elemento estrutural (barra) dos quadros planos é prismático, isto é, tem área ( $A$ ), momento de inércia ( $I$ ) e módulo de elasticidade ( $E$ ) constantes.
- não são considerados os efeitos das deformações por cisalhamento.
- vamos considerar que os efeitos axiais de esforços normais são totalmente desacoplados dos efeitos transversais de flexão e cortante.
- as barras podem ser articuladas em uma, ou ambas, das extremidades.
- as forças aplicadas à estrutura podem tanto atuar nas junções (nós) como ao longo das barras.

#### 3.1. Matriz de Rigidez do Elemento (barra) de Quadro no Sistema Local

A barra de um quadro também é chamada de elemento de quadro ou elemento de viga.

Vamos em princípio considerar que as barras não são articuladas nas extremidades, isto é, os nós são rígidos.

Estamos interessados em determinar as relações que existem entre as forças (e momentos) aplicadas e deslocamentos (e rotações) das extremidades da barra definidas pelas coordenadas locais (sistema local), tal como mostrado abaixo.



Tais relações podem expressas pela matriz de rigidez  $\underline{k}'$  mostrada abaixo:

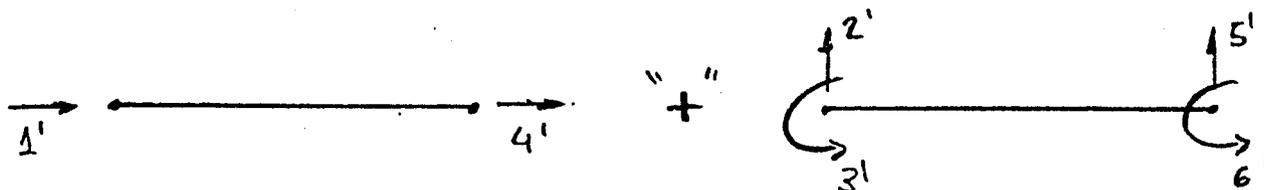
$$\begin{Bmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \\ f_4' \\ f_5' \\ f_6' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}' & k_{12}' & k_{13}' & k_{14}' & k_{15}' & k_{16}' \\ k_{21}' & k_{22}' & k_{23}' & k_{24}' & k_{25}' & k_{26}' \\ k_{31}' & k_{32}' & k_{33}' & k_{34}' & k_{35}' & k_{36}' \\ k_{41}' & k_{42}' & k_{43}' & k_{44}' & k_{45}' & k_{46}' \\ k_{51}' & k_{52}' & k_{53}' & k_{54}' & k_{55}' & k_{56}' \\ k_{61}' & k_{62}' & k_{63}' & k_{64}' & k_{65}' & k_{66}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1' \\ d_2' \\ d_3' \\ d_4' \\ d_5' \\ d_6' \end{Bmatrix}$$

$$\underline{f}' = \underline{k}' \underline{d}'$$

Como foi dito, vamos considerar que os efeitos axiais da barra (devidos a  $d_1'$ ,  $d_4'$ ,  $f_1'$  e  $f_4'$ ) são totalmente independentes dos efeitos transversais de flexão e cortante. Isto é, há um total desacoplamento entre as deslocabilidades  $d_1'$  e  $d_4'$  com as restantes. A matriz de rigidez fica então simplificada para:

$$\begin{Bmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \\ f_4' \\ f_5' \\ f_6' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}' & 0 & 0 & k_{14}' & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}' & k_{23}' & 0 & k_{25}' & k_{26}' \\ 0 & k_{32}' & k_{33}' & 0 & k_{35}' & k_{36}' \\ k_{41}' & 0 & 0 & k_{44}' & 0 & 0 \\ 0 & k_{52}' & k_{53}' & 0 & k_{55}' & k_{56}' \\ 0 & k_{62}' & k_{63}' & 0 & k_{65}' & k_{66}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1' \\ d_2' \\ d_3' \\ d_4' \\ d_5' \\ d_6' \end{Bmatrix}$$

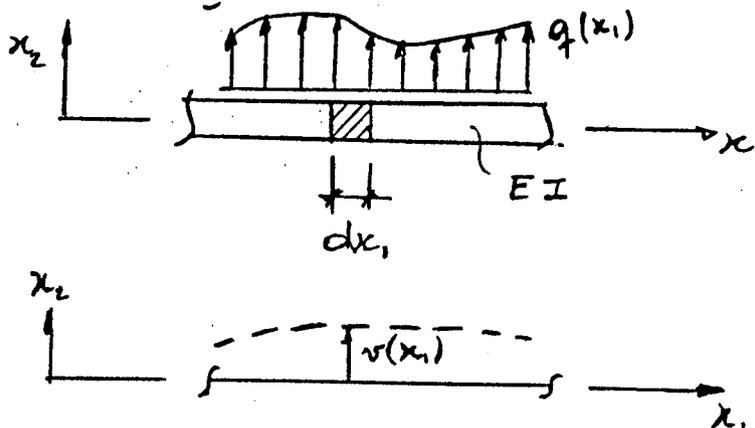
Podemos até encarar o elemento de viga como sendo a "superposição" de um elemento de treliça (somente efeitos axiais) com um elemento onde só existem efeitos transversais de flexão e cortante:



### 3.1.1. Funções de Forma para o Elemento de Viga

A equação diferencial que descreve o comportamento de uma viga  $\tilde{e}$  (vide expressão 1,23):

$$\frac{d^2}{dx_1^2} \left[ EI \frac{d^2 v}{dx_1^2} \right] = q$$



Esta equação estabelece uma relação entre os deslocamentos transversais  $v(x_1)$  e a carga transversal  $q(x_1)$  sem considerar o efeito de cisalhamento, o que  $\tilde{e}$  adotado como simplificação.

No caso de  $EI = \text{constante}$  e barra descarregada, a equação fica:

$$\frac{d^4}{dx_1^4} v = 0$$

Podemos então dizer que para este caso o deslocamento transversal  $\tilde{e}$  descrito por uma função polinomial do 3º grau em função de  $x_1$  :

$$v(x_1) = a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2 + a_4 x_1^3$$

No caso do deslocamento axial  $u(x_1)$ , como visto no item 2.1, sabemos que  $\tilde{e}$  uma função linear de  $x_1$ :

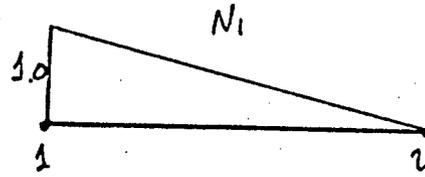
$$u(x_1) = a_5 + a_6 x_1$$

A função de forma  $N_i$  define, como visto no item 2.1, os deslocamentos ao longo do elemento quando o  $i$ -ésimo grau de liberdade  $d_i$  tem valor unitário e os outros nulos.

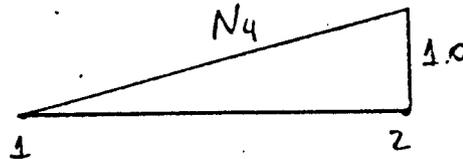
Para os efeitos axiais sabemos (item 2.1):

$$u(x_1) = N_1(x_1) d_1 + N_4(x_1) d_4$$

Onde,



$$N_1(x_1) = 1 - x_1/L$$



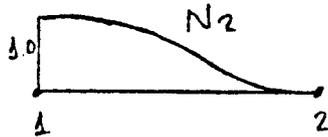
$$N_4(x_1) = x_1/L$$

Para os efeitos transversais temos:

$$v(x_1) = N_2(x_1) d_2 + N_3(x_1) d_3 + N_5(x_1) d_5 + N_6(x_1) d_6$$

Onde,

Cond. de Contorno:

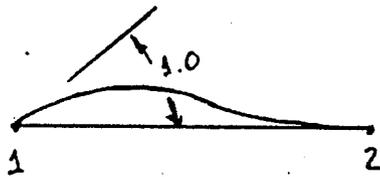


$$x_1 = 0 \begin{cases} v(x_1) = 1.0 \\ \frac{dv}{dx_1} = 0 \end{cases} \quad x_1 = L \begin{cases} v(x_1) = 0 \\ \frac{dv}{dx_1} = 0 \end{cases}$$

$$N_2(x_1) = 1 - 3\left(\frac{x_1}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x_1}{L}\right)^3$$

$N_3$

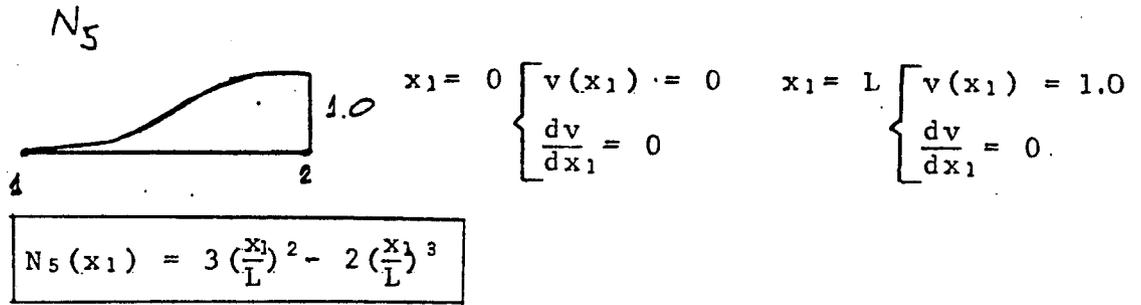
Cond. de Contorno:



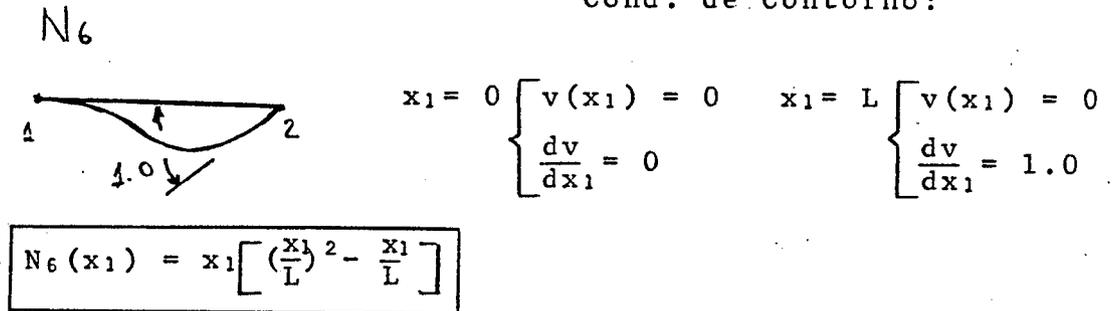
$$x_1 = 0 \begin{cases} v(x_1) = 0 \\ \frac{dv}{dx_1} = 1.0 \end{cases} \quad x_1 = L \begin{cases} v(x_1) = 0 \\ \frac{dv}{dx_1} = 0 \end{cases}$$

$$N_3(x_1) = x_1 \left(1 - \frac{x_1}{L}\right)^2$$

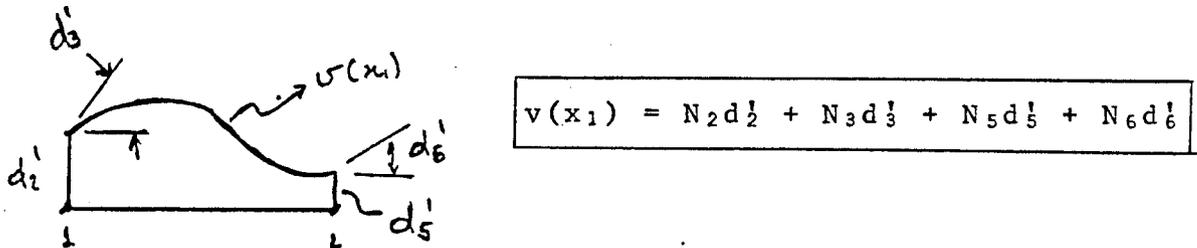
Cond. de Contorno;



Cond. de Contorno:



Qualquer deslocamento transversal  $v(x_1)$  pode ser escrito utilizando as funções  $N_2$ ,  $N_3$ ,  $N_5$  e  $N_6$  em função dos deslocamentos extremos  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $d_5$  e  $d_6$ :



Estas funções descrevem o deslocamento transversal de forma correta para o caso de  $EI = \text{const}$ , e no caso de barra des carregada. Mas podem servir como aproximação para os outros casos.

Os deslocamentos no plano dos pontos da barra ficam então definidos pela matriz das funções de forma  $N$ :

$$\begin{Bmatrix} u(x_1) \\ v(x_1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u(x_1) \\ v(x_1) \end{Bmatrix} = \tilde{N} \underline{d}'$$

### 3.1.2. Determinação da Matriz de Rigidez por Aplicação do Princípio dos Deslocamentos Virtuais

O princípio dos deslocamentos virtuais, como visto no item 1.8.1, estabelece condições de equilíbrio para as forças extremas atuantes na barra e para as tensões internas, e é expresso por:

$$\underbrace{\Sigma \delta D \cdot F}_{\text{Trabalho virtual externo}} = \underbrace{\int_V \delta \epsilon \cdot \sigma dV}_{\text{Energia de deformação interna virtual}} \quad \delta w_{\epsilon} = \delta U$$

Trabalho virtual externo      Energia de deformação interna virtual

onde,

$F \rightarrow$  forças externas reais no nosso caso serão  $\underline{f}'$

$\sigma \rightarrow$  tensões internas reais provocadas pelas forças reais e por isso mesmo em equilíbrio com estas. No nosso caso estamos desprezando o efeito do cortante (cisalhamento), estas tensões são sempre tensões normais à seção transversal.

Assim  $\sigma = \sigma_{x_1}$

$\delta D \rightarrow$  deslocamentos virtuais externos

$\delta u(x_1)$  e  $\delta v(x_1)$

Como as forças externas estão só nas extremidades temos

$\delta D = \delta \underline{d}'$

$\delta \epsilon \rightarrow$  deformações internas virtuais compatíveis com os deslocamentos  $\delta D$ .

No nosso caso, como sã consideramos os trabalhos das tensões normais, estas deformações também são normais à seção. Assim  $\delta c = \delta \epsilon x_1$ .

Para, a partir da expressão do princípio dos deslocamentos virtuais, chegarmos a relação  $f' = k' d'$  precisamos das relações entre os deslocamentos externos  $u(x_1)$  e  $v(x_1)$  e as deformações internas  $\epsilon x_1$ .

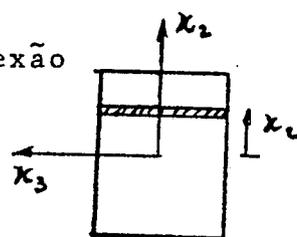
Estas deformações são provenientes dos efeitos axiais e de flexão, os quais estamos considerando desacoplados.

Tais deformações são, então, definidas por duas parcelas (vide expressões (1.12) e (1.13)):

$$\boxed{\epsilon_a = \frac{du}{dx_1}} \rightarrow \text{deformação axial}$$

$$\boxed{\epsilon_f = -\frac{d^2v}{dx_1^2} x_2} \rightarrow \text{deformação por flexão}$$

Sendo  $\frac{d^2v}{dx_1^2} = K_z \rightarrow$  curvatura



Do item 3.1.1 temos:

Seção Transversal

$$u(x_1) = N_1 d_1' + N_4 d_4' \rightarrow \epsilon_a = \frac{dN_1}{dx_1} \cdot d_1' + \frac{dN_4}{dx_1} \cdot d_4'$$

$$v(x_1) = N_2 d_2' + N_3 d_3' + N_5 d_5' + N_6 d_6'$$

$$\epsilon_f = -\frac{d^2N_2}{dx_1^2} \cdot x_2 \cdot d_1' - \frac{d^2N_3}{dx_1^2} \cdot x_2 \cdot d_3' - \frac{d^2N_5}{dx_1^2} \cdot x_2 \cdot d_5' - \frac{d^2N_6}{dx_1^2} \cdot x_2 \cdot d_6'$$

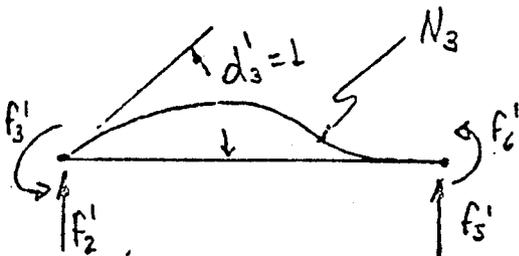
ou,

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_a \\ \epsilon_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx_1} & 0 & 0 & \frac{dN_4}{dx_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2N_2}{dx_1^2} \cdot x_2 & -\frac{d^2N_3}{dx_1^2} \cdot x_2 & 0 & -\frac{d^2N_5}{dx_1^2} \cdot x_2 & -\frac{d^2N_6}{dx_1^2} \cdot x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}$$

ou ainda,  $\begin{Bmatrix} \epsilon_a \\ \epsilon_f \end{Bmatrix} = \tilde{B} \tilde{d}'$

onde  $\tilde{B} = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & 0 & N_4' & 0 & 0 \\ 0 & -N_2'' x_2 & -N_3'' x_2 & 0 & -N_5'' x_2 & -N_6'' x_2 \end{bmatrix}$

Vamos primeiramente exemplificar a determinação da matriz de rigidez pelo princípio dos deslocamentos virtuais para o termo  $k_{23}$ . Depois a matriz vai ser determinada de forma global, envolvendo todos termos. Assim:



$k_{23} = ?$

sistema real

$$F \begin{cases} f_1' = k_{13} d_3' \\ f_3' = k_{33} d_3' \\ f_5' = k_{53} d_3' \\ f_6' = k_{63} d_3' \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma = E \epsilon_f \\ \sigma = -E \frac{d^2 N_3}{dx_1^2} \cdot x_2 \cdot d_3' \end{cases}$$

Vamos procurar um sistema virtual onde  $\delta d_2' = 1$  produza trabalho externo:

sistema virtual



$$\begin{cases} \delta D = \delta d_2' N_2 \\ \delta \epsilon = \delta d_2' \left( -\frac{d^2 N_2}{dx_1^2} \cdot x_2 \right) \end{cases}$$

A aplicação do princípio resulta em:

$$\delta w_E = \delta d'_2 \cdot f'_2 = \delta d'_2 \cdot k_{23} \delta d'_2$$

$$\delta U = \delta d'_2 \int_V \left[ \left( -\frac{d^2 N_2}{dx_1^2} \cdot x_2 \right) \cdot E \cdot \left( -\frac{d^2 N_3}{dx_1^2} \cdot x_2 \right) \right] dV \cdot d'_2$$

N<sub>2</sub> e N<sub>3</sub> s̄o depen-  
dem de x<sub>1</sub>

$$\delta U = \delta d'_2 \int_0^L \left[ \frac{d^2 N_2}{dx_1^2} \cdot \frac{d^2 N_3}{dx_1^2} E \cdot \int_A x_2^2 dA \right] dx_1 \cdot d'_2$$

$\int_A x_2^2 dA = I$

$$\boxed{\delta w_E = \delta U} \rightarrow k_{23} = EI \int_0^L N_2'(x_1) \cdot N_3'(x_1) dx \rightarrow \boxed{k_{23} = \frac{6EI}{L^2}}$$

Observe que  $\delta U$  pode ser encarado como o trabalho executado pelo momento interno

$$M(x_1) = EI \frac{d^2 N_3}{dx_1^2} \cdot d'_2$$

(vide expressão (1.22))  
 $M = EI \frac{d^2 v}{dx_1^2}$

Submetido a uma curvatura virtual

$$\delta K_z = \delta d'_2 \frac{d^2 N_2}{dx_1^2}$$

$$\rightarrow \delta d'_2 \cdot k_{23} \cdot d'_2 = \int_0^L \delta K_z \cdot M(x_1) dx_1$$

Analogamente para os outros termos de flexão da matriz:

$$\boxed{k'_{ij} = EI \int_0^L N_i''(x_1) N_j''(x_1) dx_1}$$

$$\begin{aligned} i &= 2, 3, 5, 6 \\ j &= 2, 3, 5, 6 \end{aligned}$$

Os termos da matriz de rigidez para o comportamento axial ficam determinados, como foi visto no item 2.1.2, por:

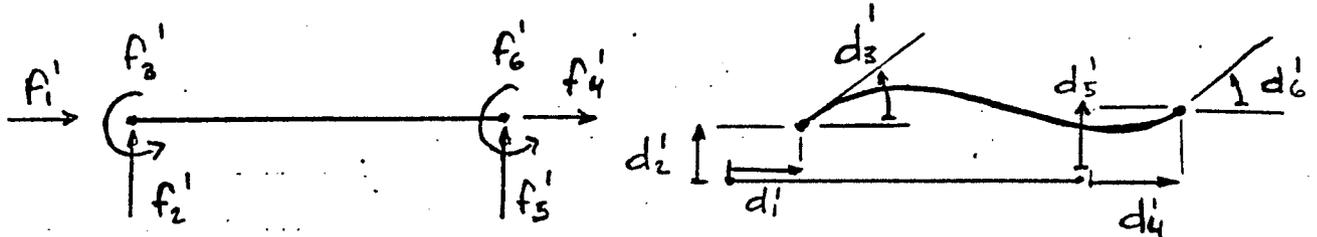
$$\boxed{k_{ij} = EA \int_0^L N_i'(x_1) N_j'(x_1) dx_1}$$

$$\begin{aligned} i &= 1, 4 \\ j &= 1, 4 \end{aligned}$$

Vamos agora determinar a matriz de rigidez de uma forma global, envolvendo todos os coeficientes simultaneamente, também

utilizando o princípio dos deslocamentos virtuais.

- Sistema real



forças externas reais:  $\underline{f}'$

deslocamentos reais:  $\begin{Bmatrix} u(x_1) \\ v(x_1) \end{Bmatrix} = \underline{N} \underline{d}'$

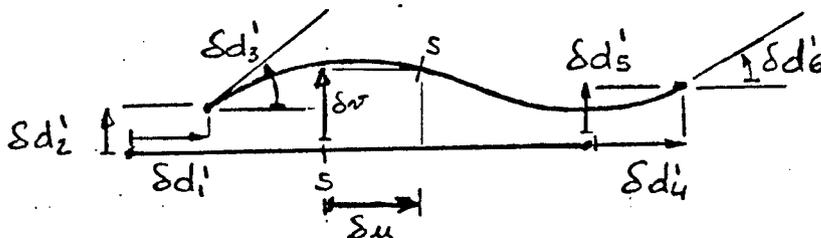
deformações reais:  $\begin{Bmatrix} \epsilon_a \\ \epsilon_f \end{Bmatrix} = \underline{B} \underline{d}'$

tensões internas reais:  $\begin{Bmatrix} \sigma_a \\ \sigma_f \end{Bmatrix} = E \underline{B} \underline{d}'$

$\sigma_a \rightarrow$  tensão normal devido a efeitos axiais

$\sigma_f \rightarrow$  tensão normal devido a efeitos de flexão

- Sistema virtual



deslocamentos virtuais:  $\begin{Bmatrix} \delta u(x_1) \\ \delta v(x_1) \end{Bmatrix} = \underline{N} \underline{\delta d}'$

deformações virtuais:  $\begin{Bmatrix} \delta \epsilon_a \\ \delta \epsilon_f \end{Bmatrix} = \underline{B} \underline{\delta d}'$

- Trabalho virtual das forças externas

$$\delta W_E = (\delta \underline{d}')^T \cdot \underline{f}'$$

- Energia de deformação interna virtual

$$\delta U = \int_V (\delta \epsilon_a \quad \delta \epsilon_f) \begin{bmatrix} \sigma_a \\ \sigma_f \end{bmatrix} dV$$

$$\delta U = \int_V (\delta \underline{d}')^T \underline{B}^T \cdot E \cdot \underline{B} \cdot \underline{d}' dV$$

$$\delta U = (\delta \underline{d}')^T \int_0^L \left[ \int_A \underline{B}^T E \underline{B} dA \right] dx_1 \cdot \underline{d}'$$

-  $\delta W_E = \delta U$

$$(\delta \underline{d}')^T \cdot \underline{f}' = (\delta \underline{d}')^T \int_0^L \left[ \int_A \underline{B}^T E \underline{B} dA \right] dx_1 \cdot \underline{d}'$$

$$\underline{f}' = \int_0^L \left[ \int_A \underline{B}^T E \underline{B} dA \right] dx_1 \cdot \underline{d}'$$

Logo  $\underline{k}' = \int_0^L \left[ \int_A \underline{B}^T E \underline{B} dA \right] dx_1$

Operando-se a expressão acima chega-se a:

$$\underline{k}' = \int_0^L \begin{bmatrix} EAN_1 N_1 & 0 & 0 & EAN_1 N_4 & 0 & 0 \\ 0 & EIN_2' N_2' & EIN_2' N_3' & 0 & EIN_2' N_5' & EIN_2' N_6' \\ 0 & EIN_3' N_2' & EIN_3' N_3' & 0 & EIN_3' N_5' & EIN_3' N_6' \\ EAN_4 N_1 & 0 & 0 & EAN_4 N_4 & 0 & 0 \\ 0 & EIN_5' N_2' & EIN_5' N_3' & 0 & EIN_5' N_5' & EIN_5' N_6' \\ 0 & EIN_6' N_2' & EIN_6' N_3' & 0 & EIN_6' N_5' & EIN_6' N_6' \end{bmatrix} dx_1$$

Exercício proposto: Chegar à expressão acima

ou,

$$\bar{k}' = \begin{bmatrix}
 EA \int_0^L N_1' N_1' dx_1 & 0 & 0 & EA \int_0^L N_1' N_4' dx_1 & 0 & 0 \\
 0 & EI \int_0^L N_2'' N_2'' dx_1 & EI \int_0^L N_2'' N_3'' dx_1 & 0 & EI \int_0^L N_2'' N_5'' dx_1 & EI \int_0^L N_2'' N_6'' dx_1 \\
 0 & EI \int_0^L N_3'' N_2'' dx_1 & EI \int_0^L N_3'' N_3'' dx_1 & 0 & EI \int_0^L N_3'' N_5'' dx_1 & EI \int_0^L N_3'' N_6'' dx_1 \\
 EA \int_0^L N_4' N_4' dx_1 & 0 & 0 & EA \int_0^L N_4' N_4' dx_1 & 0 & 0 \\
 0 & EI \int_0^L N_5'' N_2'' dx_1 & EI \int_0^L N_5'' N_3'' dx_1 & 0 & EI \int_0^L N_5'' N_5'' dx_1 & EI \int_0^L N_5'' N_6'' dx_1 \\
 0 & EI \int_0^L N_6'' N_2'' dx_1 & EI \int_0^L N_6'' N_3'' dx_1 & 0 & EI \int_0^L N_6'' N_5'' dx_1 & EI \int_0^L N_6'' N_6'' dx_1
 \end{bmatrix}$$

Como havia sido mostrado anteriormente.

Exercício proposto: Chegar à matriz de rigidez  $\underline{k}'$

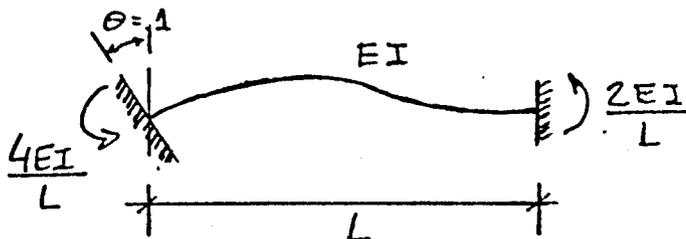
$$\underline{k}' = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Cada coluna  $i$  da matriz estabelece as forças externas necessárias para equilibrar a barra submetida à configuração deformada  $N_i$ . A condição de equilíbrio vem da própria aplicação do princípio dos deslocamentos virtuais (vide item 1.8.1).

A imposição direta do equilíbrio para cada configuração deformada  $N_i$  também leva à determinação da matriz  $\underline{k}'$ .

Exercício proposto

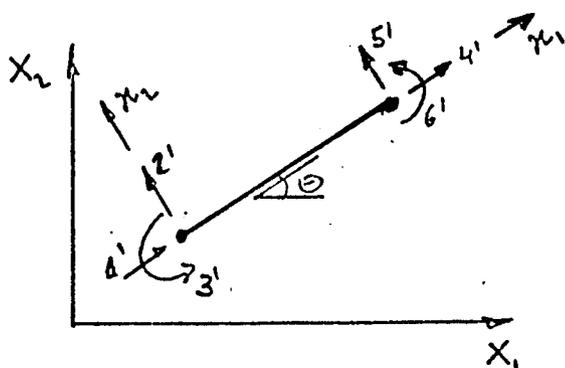
Determinar a matriz  $\underline{k}'$  a partir da imposição do equilíbrio diretamente. Sabe-se:



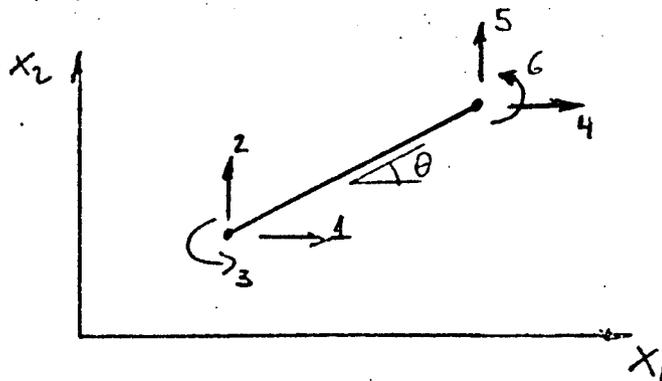
A parcela axial pode ser tirada do item 2.1.1.

### 3.2. Matriz de Rigidez do Elemento (barra) de Quadro no Sistema de Eixos Globais

Deseja-se determinar as relações entre forças e deslocamentos nas coordenadas locais no sistema de eixos globais (figura da direita):



$$\underline{\underline{f'}} = \underline{\underline{k'}} \underline{\underline{d'}}$$



$$\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{k}} \underline{\underline{d}}$$

Das figuras podemos tirar:

$$d_1' = d_1 \cos \theta + d_2 \sin \theta$$

$$d_4' = d_4 \cos \theta + d_5 \sin \theta$$

$$d_2' = -d_1 \sin \theta + d_2 \cos \theta$$

$$d_5' = -d_4 \sin \theta + d_5 \cos \theta$$

$$d_3' = d_3$$

$$d_6' = d_6$$

$$\begin{Bmatrix} d_1' \\ d_2' \\ d_3' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \quad \left\| \quad \begin{Bmatrix} d_4' \\ d_5' \\ d_6' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}$$

Onde: 
$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}}$$

$\underline{\underline{T}}$  é uma matriz ortogonal, isto é,

$$\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{T}}^T$$

Temos então:

$$\underline{d}' = \begin{bmatrix} \underline{R}^T & \underline{O} \\ \underline{O} & \underline{I} \end{bmatrix} \underline{d} \quad \text{ou} \quad \boxed{\underline{d}' = \underline{R} \underline{d}}$$

6x6

Onde  $\underline{R} = \begin{bmatrix} \underline{R}^T & \underline{O} \\ \underline{O} & \underline{I} \end{bmatrix}$  também é ortogonal  $\therefore$

$\therefore$   $\boxed{\underline{R}^{-1} = \underline{R}^T}$  Matriz de Rotação

Podemos tirar  $\underline{d}$  em função de  $\underline{d}'$ :

$$\underline{d} = \underline{R}^{-1} \underline{d}' \rightarrow \boxed{\underline{d} = \underline{R}^T \underline{d}'}$$

Analogamente podemos definir para o vetor de forças:

$$\boxed{\underline{f}' = \underline{R} \underline{f}} \quad \text{e} \quad \boxed{\underline{f} = \underline{R}^T \underline{f}'}$$

A relação que existe  $\underline{d}' = \underline{R} \underline{d}$  e  $\underline{f} = \underline{R}^T \underline{f}'$  é uma relação de contragradência e poderia ter sido determinada como foi feito no item 2.2.1.

Temos conhecida a relação  $\boxed{\underline{k}' \underline{d}' = \underline{f}'}$

Substituindo na equação  $\underline{d}'$  por  $\underline{R} \underline{d}$  e pré-multiplicando por  $\underline{R}^T$ , resulta em:

$$\underbrace{\underline{R}^T \underline{k}' \underline{R}}_{\underline{k}} \underline{d} = \underbrace{\underline{R}^T}_{\underline{f}} \underline{f}'$$

$\therefore$   $\boxed{\underline{k} = \underline{R}^T \underline{k}' \underline{R}}$  Que é a matriz de rigidez da barra nas coordenadas globais.

A matriz  $k$  é mostrada abaixo onde,

$$C_x = \cos \theta \quad \text{e} \quad C_y = \sin \theta$$

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} C_x^2 + \frac{12EI}{L^3} z C_y^2 & \frac{EA}{L} x - \frac{12EI}{L^3} z C_x C_y & -\frac{6EI}{L^2} z C_y & -\left(\frac{EA}{L} x C_x^2 + \frac{12EI}{L^3} z C_y^2\right) C_x C_y & -\left(\frac{EA}{L} x - \frac{12EI}{L^3} z\right) C_x C_y & -\frac{6EI}{L^2} z C_y \\
 \left(\frac{EA}{L} x - \frac{12EI}{L^3} z\right) C_x C_y & \frac{EA}{L} C_y^2 + \frac{12EI}{L^3} z C_x^2 & \frac{6EI}{L^2} z C_x & -\left(\frac{EA}{L} x - \frac{12EI}{L^3} z\right) C_x C_y & -\left(\frac{EA}{L} x C_y^2 + \frac{12EI}{L^3} z C_x^2\right) C_x C_y & \frac{6EI}{L^2} z C_x \\
 -\frac{6EI}{L^2} z C_y & \frac{6EI}{L^2} z C_x & \frac{4EI}{L} z & \frac{6EI}{L^2} z C_y & -\frac{6EI}{L^2} z C_x & \frac{2EI}{L} z \\
 -\left(\frac{EA}{L} x C_x^2 + \frac{12EI}{L^3} z C_y^2\right) C_x C_y & -\left(\frac{EA}{L} x - \frac{12EI}{L^3} z\right) C_x C_y & \frac{6EI}{L^2} z C_y & \left(\frac{EA}{L} x - \frac{12EI}{L^3} z\right) C_x C_y & \left(\frac{EA}{L} x - \frac{12EI}{L^3} z\right) C_x C_y & \frac{6EI}{L^2} z C_y \\
 -\left(\frac{EA}{L} x - \frac{12EI}{L^3} z\right) C_x C_y & -\left(\frac{EA}{L} x C_y^2 + \frac{12EI}{L^3} z C_x^2\right) C_x C_y & -\frac{6EI}{L^2} z C_x & \left(\frac{EA}{L} x - \frac{12EI}{L^3} z\right) C_x C_y & \frac{EA}{L} x C_y^2 + \frac{12EI}{L^3} z C_x^2 & -\frac{6EI}{L^2} z C_x \\
 -\frac{6EI}{L^2} z C_y & \frac{6EI}{L^2} z C_x & \frac{2EI}{L} z & -\frac{6EI}{L^2} z C_y & -\frac{6EI}{L^2} z C_x & \frac{4EI}{L} z
 \end{bmatrix}$$

$k =$

### 3.3. Forças Equivalentes Nodais

Existe uma maneira geral de definir as forças equivalentes nodais para um dado carregamento definido no sistema local. Este procedimento só é válido para barras prismáticas (E, A e I constantes).

Tal método utiliza o Princípio dos Deslocamentos Virtuais e as funções de forma  $N_i$  (vide item 31.1).

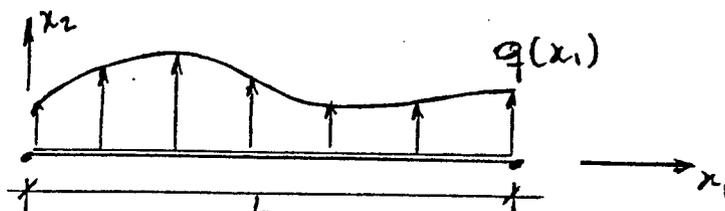
Vamos exemplificar para o caso de carregamentos transversais à barra. Para carregamentos axiais uma analogia pode ser feita.

#### IDÉIA BÁSICA

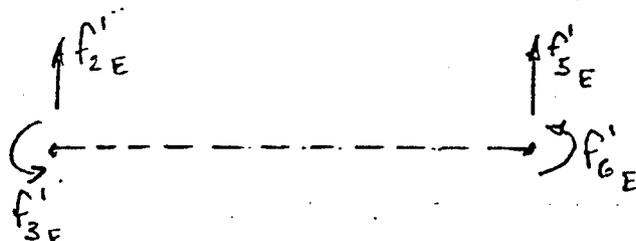
Igualar trabalho virtual externo provocado pelas forças que atuam ao longo da barra com trabalho virtual provocado pelas

forças (e momentos) equivalentes nas extremidades da barra, utilizando em ambos os casos as mesmas configurações de deslocamentos virtuais que foram adotadas para deduzir a matriz de rigidez (funções de forma).

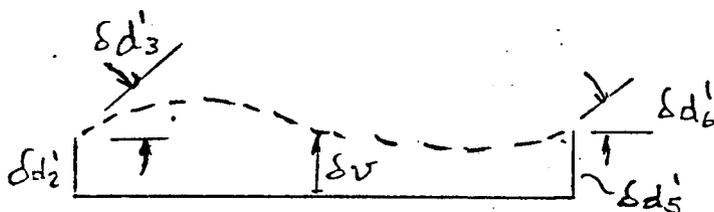
Seja uma barra com um carregamento transversal qualquer:



As forças equivalentes nodais são (sistema local):



Deslocamento virtual  $\delta v(x_1)$ :



$$\delta v(x_1) = \delta d'_2 N_2 + \delta d'_3 N_3 + \delta d'_5 N_5 + \delta d'_6 N_6$$

Onde  $\delta d'_2$ ,  $\delta d'_3$ ,  $\delta d'_5$  e  $\delta d'_6$  são os deslocamentos virtuais das extremidades.

Vamos agora computar os trabalhos virtuais provocados por  $q(x_1)$  e por  $f'_E$ .

Provocado por  $q(x_1)$

$$\delta W_E = \int_0^L \delta v(x_1) \cdot q(x_1) dx_1$$

$$\delta W_E = \{ \delta d_2' \quad \delta d_3' \quad \delta d_5' \quad \delta d_6' \} \begin{Bmatrix} \int_0^L N_2 q dx_1 \\ \int_0^L N_3 q dx_1 \\ \int_0^L N_5 q dx_1 \\ \int_0^L N_6 q dx_1 \end{Bmatrix}$$

Provocado por  $f'_{\sim E}$

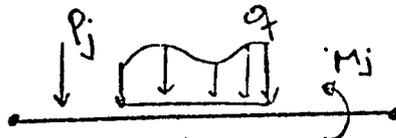
$$\delta W_E = \delta d_2' f'_{2E} + \delta d_3' f'_{3E} + \delta d_5' f'_{5E} + \delta d_6' f'_{6E}$$

$$\delta W_E = \{ \delta d_2' \quad \delta d_3' \quad \delta d_5' \quad \delta d_6' \} \begin{Bmatrix} f'_{2E} \\ f'_{3E} \\ f'_{5E} \\ f'_{6E} \end{Bmatrix}$$

Igualando os trabalhos externos

$$\begin{Bmatrix} f'_{2E} \\ f'_{3E} \\ f'_{5E} \\ f'_{6E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^L N_2 q dx_1 \\ \int_0^L N_3 q dx_1 \\ \int_0^L N_5 q dx_1 \\ \int_0^L N_6 q dx_1 \end{Bmatrix}$$

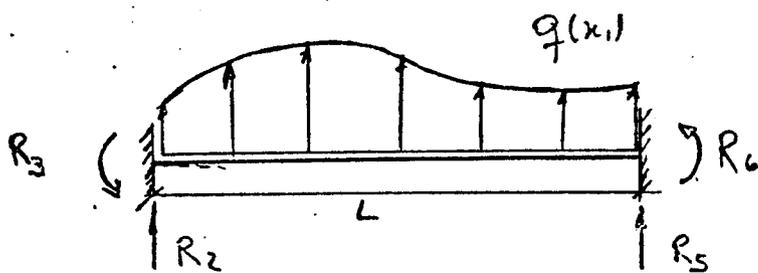
No caso de termos também cargas concentradas ou momentos a expressão anterior pode ser ampliada.



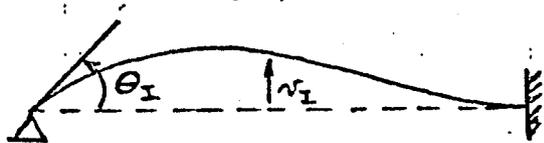
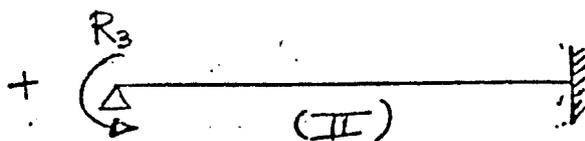
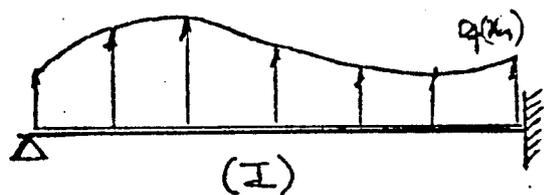
$$\begin{Bmatrix} F_{2E}' \\ F_{3E}' \\ F_{5E}' \\ F_{6E}' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int N_2 q dx_1 \\ \int N_3 q dx_1 \\ \int N_5 q dx_1 \\ \int N_6 q dx_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sum N_2(x_i^j) P_j \\ \sum N_3(x_i^j) P_j \\ \sum N_5(x_i^j) P_j \\ \sum N_6(x_i^j) P_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sum N_2'(x_i^j) M_j \\ \sum N_3'(x_i^j) M_j \\ \sum N_5'(x_i^j) M_j \\ \sum N_6'(x_i^j) M_j \end{Bmatrix}$$

Onde  $N_i(x_i^j)$  é o valor da função  $N_i$  no ponto  $j$  e  $N_i'(x_i^j)$  a derivada (rotação).

Imagine agora que nós estamos interessados em calcular as reações de apoio para a mesma barra considerada bi-engastada e solicitada pelo mesmo carregamento  $q(x_1)$ .



Vamos determinar  $R_3$  por exemplo. Podemos interpretar a estrutura pela soma de dois casos como mostrado ao lado.



$$v_{II} = N_3(x_1) \cdot \theta_{II}$$

(Somente se  $EI = \text{constante}$ )

Os deslocamentos do sistema (II) são proporcionais à função de forma  $N_3$  somente se  $EI$  é constante.

Aplicando o teorema de Betti aos dois sistemas:

"Trabalho das forças do sistema (II) com os deslocamentos do sistema (I) é igual ao trabalho das forças do sistema (I) com os deslocamentos do sistema (II)". Ou melhor:

$$R_3 \cdot \theta_{II} = \int_0^L q(x_1) \cdot N_3(x_1) \cdot \theta_{II} dx_1$$

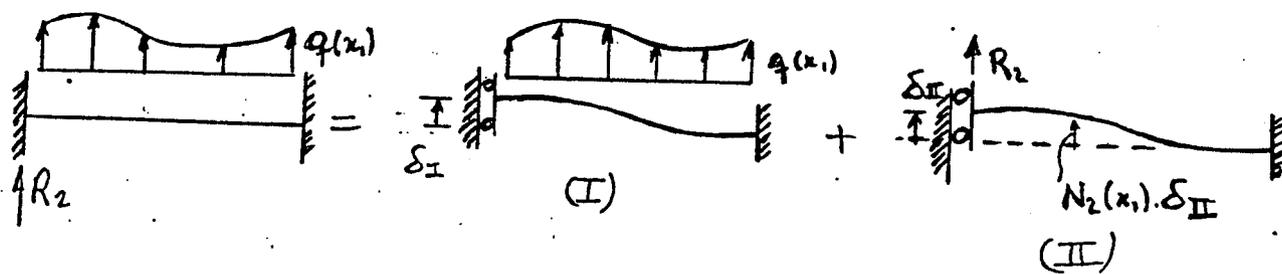
Para que  $R_3$  seja reação de apoio do engaste é necessário que  $\theta_{II} = -\theta_I$

$$R_3 = - \int_0^L q(x_1) N_3(x_1) dx_1 = - f_{3E}' \quad \text{que é a força equi}$$

valente nodal com sentido oposto, como foi imaginado anteriormente.

Esta expressão é exata para o caso de EI constante, mas tem caráter aproximado para calcular as reações de engastamento no caso de EI não ser constante.

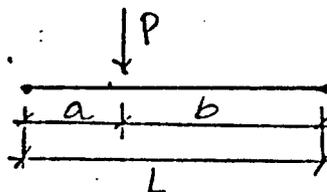
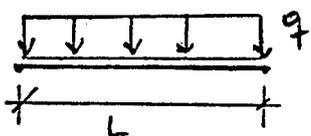
Para calcular uma das reações verticais:



$$\text{Teo de Betti } (\delta_{II} = -\delta_I) \Rightarrow R_2 = - \int_0^L q N_2 dx_1 = - f_{2E}'$$

### Exercício Proposto

Verificar se as forças nodais equivalentes calculadas pelo processo mostrado são iguais as reações de engastamento perfeito com sentido trocado para os seguintes casos:

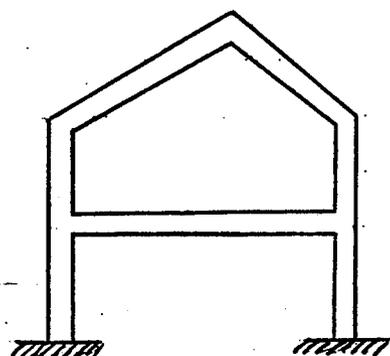


#### 4. INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS - ELEMENTO TRIANGULAR COM DEFORMAÇÃO CONSTANTE

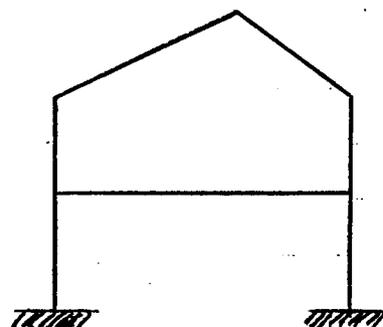
A intenção deste capítulo é mostrar a ligação existente entre a análise de quadros e o método dos elementos finitos. Em essência queremos mostrar que a análise desenvolvida até agora para as treliças, quadros e grelhas pode ser incluída em um método mais geral para análise de modelos estruturais.

A diferença básica entre a análise de quadros e o método dos elementos finitos está no próprio modelo estrutural. Em ambos os casos o modelo estrutural é formado pela montagem de componentes ou elementos estruturais individuais. No primeiro caso os elementos aparecem quase que naturalmente a partir da própria concepção da estrutura (vide figura abaixo). No segundo, a

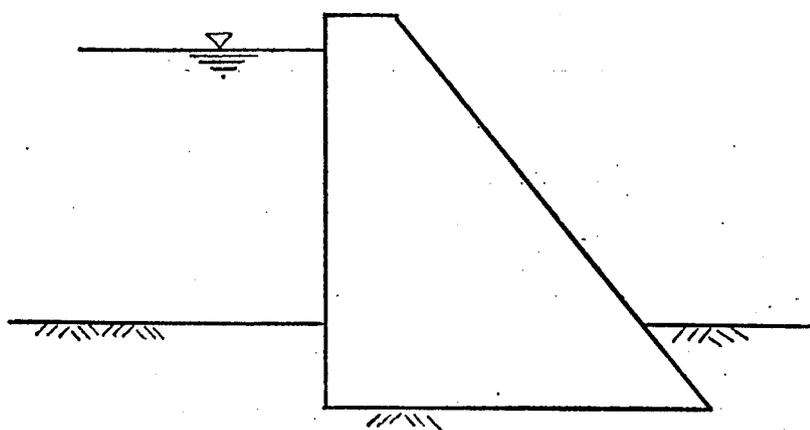
estrutura é modelada por um número finito de elementos para representar um meio elástico contínuo, exemplificado pela seção transversal de uma barragem de gravidade mostrada abaixo.



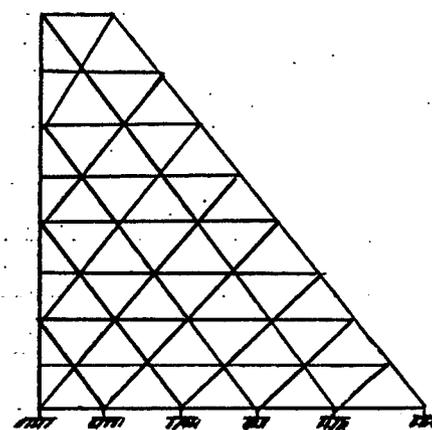
Quadro Real



Modelo Estrutural



Barragem Real

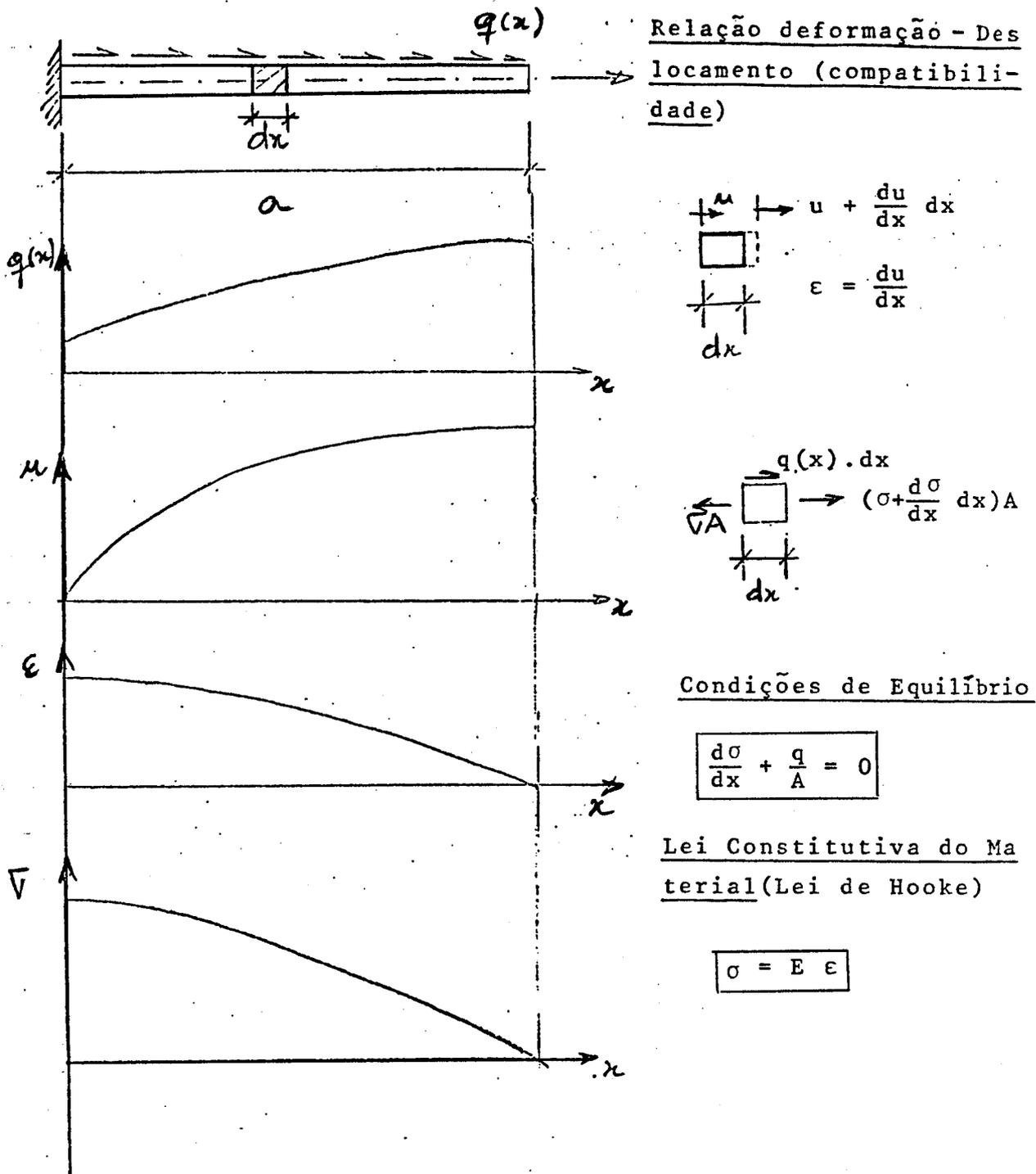


Modelo Estrutural

#### 4.1. Idéias Básicas

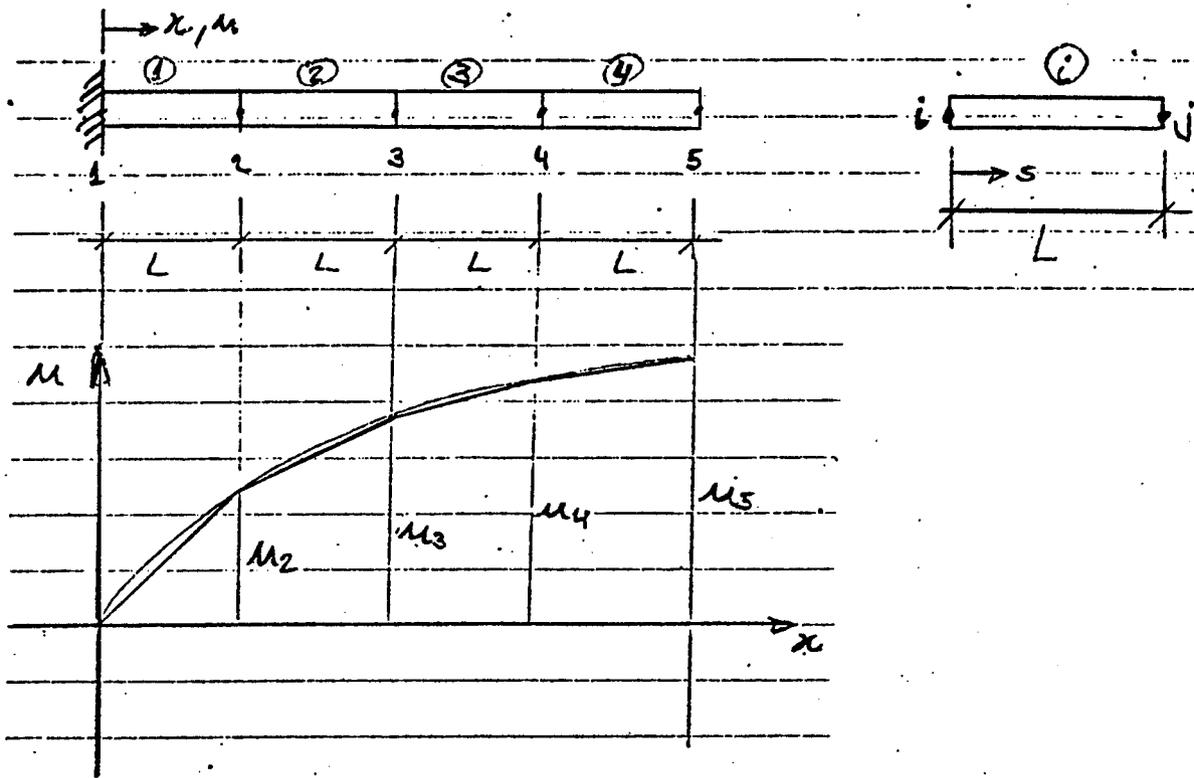
As idéias básicas do método dos elementos finitos sob o enfoque do método dos deslocamentos (rigidez) são descritas, como se segue, exemplificadas para um meio contínuo unidimensional.

Seja uma barra com área transversal  $A$  e módulo de elasticidade  $E$  submetida a um carregamento axial genérico  $q(x)$ .



Idéias Básicas

1º) O meio contínuo é subdividido (discretizado) em um número finito de elementos finitos sendo que, dentro de cada elemento é estabelecida uma lei de variação para os deslocamentos, por exemplo que os deslocamentos variam linearmente dentro de cada elemento. O deslocamento  $u(x)$  fica então aproximado como mostrado abaixo.



Para um elemento genérico  $i$

$$u = a_1 + a_2 s \quad \text{ou} \quad u = \{1 \ s\} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

para  $s = 0 \rightarrow u = u_i = d_1$  (local)

para  $s = L \rightarrow u = u_j = d_2$  (local)

Assim,

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Donde substituindo (2) em (1) temos:

$$u = \{1 \ s\} \cdot \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad u = \left\{ \frac{L-s}{L} \quad \frac{s}{L} \right\} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

ou  $u = \{N_1 \ N_2\} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad u = \tilde{N} \tilde{d} \quad N_i \rightarrow \text{função de forma}$

29) As condições de compatibilidade de deslocamentos dentro de cada elemento ficam satisfeitas se a função que interpola o deslocamento for contínua. No exemplo a deformação dentro de cada elemento é constante:

$$\epsilon = \frac{du}{dx} = \frac{dN}{ds} \cdot \underline{\tilde{d}} \rightarrow \boxed{\epsilon = \underline{\tilde{B}} \underline{\tilde{d}}} \quad \epsilon = \frac{du}{dx} = a_2 = \frac{-d_1 + d_2}{L}$$

(vide expressão (2))

39) As condições de compatibilidade de deslocamentos entre os diversos elementos é introduzida da mesma forma como vinha sendo feita para quadros, isto é, os graus de liberdades correspondentes de cada elementos são forçados serem iguais. Assim:

$$\begin{array}{l} d_1^1 = u_1 = 0 \\ d_2^1 = d_1^2 = u_2 \\ d_2^2 = d_1^3 = u_3 \\ d_2^3 = d_1^4 = u_4 \\ d_2^4 = u_5 \end{array} \quad \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ \hline d_1 \\ d_2 \\ \hline d_1 \\ d_2 \\ \hline d_1 \\ d_2 \end{array} \right] = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \hline u_3 \\ u_4 \\ \hline u_5 \end{array} \right] \end{array}$$

Para uma barra genérica  $i$

$$\boxed{\underline{\tilde{d}}^i = \underline{\tilde{A}}^i \underline{\tilde{D}}}$$

No caso do meio contínuo unidimensional a condição de igualdade para os correspondentes deslocamentos nodais implica na validade da compatibilidade de deslocamentos em todo o meio. Para meios contínuos bi ou tridimensionais nem sempre isto acontece, como será comentado mais tarde, embora seja desejável que haja compatibilidade ao longo da fronteira entre dois elementos.

- 49) As Leis constitutivas do material (Lei de Hooke), definidas para tensões e deformações em um paralelepípedo infinitesimal, são substituídas por relações entre forças e deslocamentos nos graus de liberdade de um elemento. Estas relações são deduzidas tomando como base as funções de forma  $N_i$  que foram utilizadas para interpolar a função de deslocamentos. O resultado é a matriz de rigidez do elemento finito  $\underline{k}$ , ou seja:

$$\boxed{\underline{f} = \underline{k} \underline{d}} \quad \boxed{\underline{k} = \int_V \underline{B}^T E \underline{B} d v} \quad \underline{f} \rightarrow \text{forças atuando dos nós sobre o elemento.}$$

Para o exemplo estudado a matriz de rigidez de uma genérica é: (vide dedução no item 2.1).

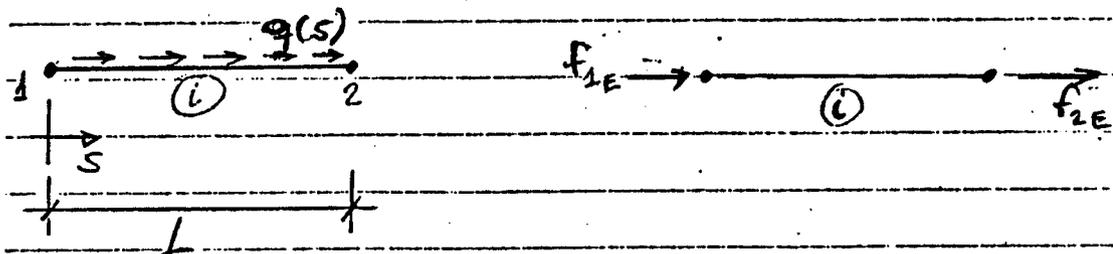
$$\underline{k} = \begin{bmatrix} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix}$$

- 59) As forças que atuam ao longo do elemento são consistentemente transportadas para os nós do elemento. As forças nodais equivalentes são "consistentes" porque o "transporte" para os nós é feito com a utilização das mesmas funções ( $N_i$ ) que interpolam os deslocamentos e utilizados para deduzir a matriz de rigidez do elemento.

As forças nodais equivalentes são deduzidas de modo a igualar o trabalho das forças que atuam ao longo do elemento quando submetidas a uma mesma configuração deformada virtual baseada nas funções  $N_i$ .

Isto foi mostrado para os quadros planos no item 3.3.

Para o nosso exemplo:



$$\begin{Bmatrix} f_{1E} \\ f_{2E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^L N_1(s) q(s) ds \\ \int_0^L N_2(s) q(s) ds \end{Bmatrix} \quad (\text{atuando sobre os n\u00f3s})$$

6º) As condi\u00e7\u00f5es de equil\u00edbrio s\u00e3o impostas aos n\u00f3s somente, isto \u00e9, s\u00e3o equa\u00e7\u00f5es de equil\u00edbrio de for\u00e7as (e momentos) nos n\u00f3s.

Nas equa\u00e7\u00f5es de equil\u00edbrio nodais dois tipos de for\u00e7a (e momento) s\u00e3o considerados:

$$\begin{aligned} \underline{F}_{\text{ext}} &= \text{for\u00e7as que atuam diretamente sobre os n\u00f3s} \\ \underline{F}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^m \underline{F}_{\text{int}}^i &= \text{for\u00e7as que atuam nos n\u00f3s vindo pelos elementos} \end{aligned}$$

Para escrever as equa\u00e7\u00f5es de equil\u00edbrio, ent\u00e3o, \u00e9 preciso "transportar" for\u00e7as extremas a um elemento i sobre os n\u00f3s ( $\underline{f}_{\text{int}}^i$ ) para o n\u00edvel de estrutura, isto \u00e9, para  $\underline{F}_{\text{int}}^i$ .

Este "transporte" vai ser determinada por igualdade de Trabalhos Virtuais com mesmos deslocamentos virtuais, como mostra do a seguir.

$$\boxed{\underline{f}_{\text{int}}^i = -\underline{k}^i \underline{d}^i + \underline{f}_E^i} \quad (\text{atuando sobre os n\u00f3s})$$

### DESLOCAMENTOS VIRTUAIS

$\delta \underline{D}$   $\rightarrow$  em todos os n\u00f3s de estrutura

$\delta \underline{d}^i$   $\rightarrow$  nas extremidades do elemento i e compat\u00edvel com os deslocamentos da estrutura  $\delta \underline{D}$

$$\boxed{\delta \underline{d}^i = \underline{A}^i \delta \underline{D}}$$

A igualdade de trabalho \u00e9 mostrada abaixo.

$$\boxed{(\delta \underline{D})^T \cdot \underline{F}_{\text{int}}^i = (\delta \underline{d}^i)^T \underline{f}_{\text{int}}^i}$$

$$(\delta \underline{D})^T \cdot \underline{F}_{\text{int}}^i = (\delta \underline{D})^T (\underline{A}^i)^T \underline{f}_{\text{int}}^i$$

Como os deslocamentos  $\delta \underline{D}$  são virtuais e podem ser diferentes de zero, podemos eliminá-los da relação, resultandó em:

$$\underline{F}_{int}^i = (\underline{A}^i)^T \underline{f}_{int}^i$$

As condições de equilíbrio  $\underline{F}_{ext} + \underline{F}_{int} = 0$  resultam em:

$$\underline{F} = \underline{K} \underline{D}$$

onde:

$$\underline{F} = \underline{F}_{ext} + \sum_{i=1}^m (\underline{A}^i)^T \underline{f}_E^i \quad (\text{cargas nodais combinadas})$$

$$\underline{K} = \sum_{i=1}^m (\underline{A}^i)^T \cdot \underline{k}^i \cdot \underline{A}^i \quad (\text{matriz de rigidez global})$$

A solução  $\underline{D}$  das condições de equilíbrio são encontrados pela resolução do sistema  $\underline{K} \underline{D} = \underline{F}$  depois da consideração das condições de contorno em deslocamentos. Esta consideração é feita da mesma forma como foi visto para treliças e quadros.

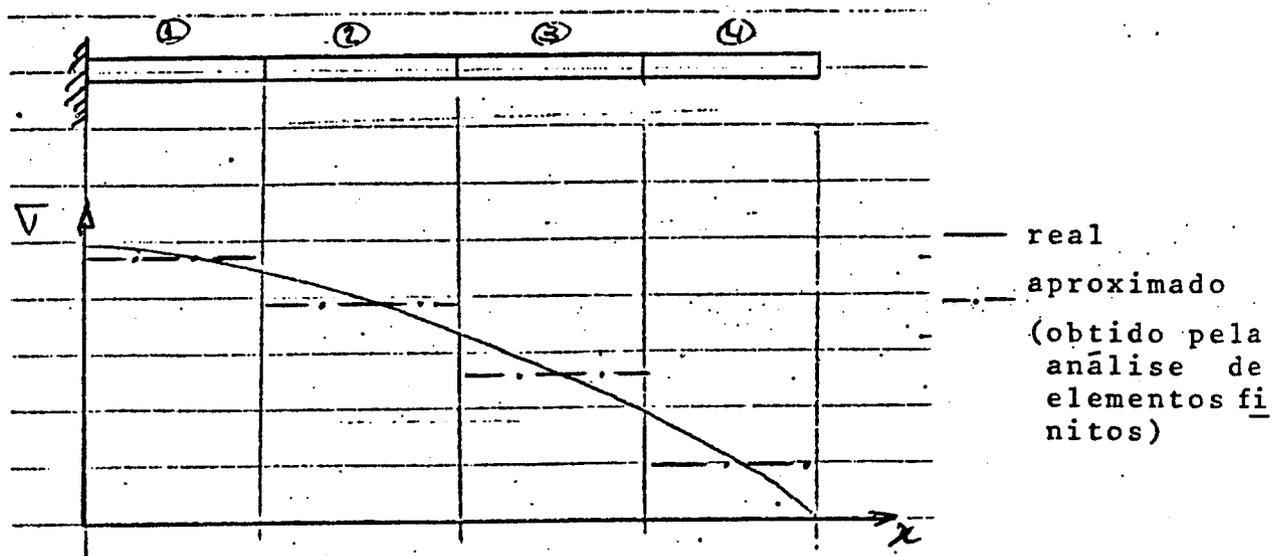
79) No caso dos elementos finitos, as tensões internas são determinadas em cada elemento somente em função das deformações do elemento, isto é, para o exemplo dado temos:

$$\underline{\sigma} = E \underline{\epsilon} = E \underline{B} \underline{d}$$

Obs: Poderia ter sido incluído uma deformação inicial  $\epsilon_0$  e uma tensão inicial  $\sigma_0$ :

$$\underline{\sigma} = E (\underline{B} \underline{d} - \epsilon_0) + \sigma_0 \quad (\epsilon_0 \text{ devido a temperatura por exemplo (ou } \sigma_0)).$$

Como no exemplo as deformações são constantes temos:



Conclusão: As tensões são determinadas de forma aproximada e não satisfazem a condição de equilíbrio infinitesimal.

$$\frac{d\sigma}{dx} + \frac{q}{A} = 0 \quad \text{No caso em que } q = 0$$

estas relações é satisfeita.

Também se observa que não há equilíbrio de tensões na ligação de dois elementos, isto é, a análise por elementos finitos leva a "saltos" de tensão entre um elemento e outro.

89) Todas aproximações feitas para a função de deslocamentos, deformações, tensões e violações das condições de compatibilidade e equilíbrio tendem a desaparecer à medida que se aumenta o número de elementos; e a resposta tende à resposta real.

Para o exemplo estudado, a poligonal considerada para função de deslocamentos tende cada vez mais à curva real.

As tensões resultantes  $\sigma = E\varepsilon$  também devem tender para valores que satisfaçam a equação

$$\frac{d\sigma}{dx} + \frac{q}{A} = 0$$

O grau de discretização depende do nível de aproximação desejado.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

- 1) No exemplo estudado se s̃o existissem cargas nodais a solução pelo método dos elementos finitos seria exata qualquer que fosse a discretização. Isto porque a função de deslocamento  $u(x)$  seria realmente formada por uma poligonal:

Equação de equilíbrio  $\rightarrow A \frac{d\sigma}{ds} = 0 \quad (q = 0)$

$$\epsilon = \frac{du}{dx} \quad \sigma = E\epsilon$$

Donde  $EA \frac{d^2u}{ds^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{u(s) = a_1 + a_2s} \quad (\text{linear})$

De forma análoga, para os quadros com somente cargas nodais e solução pelo método dos elementos finitos é exata para barras com área e inércia constantes.

Isto porque a função de deslocamentos transversais à barra  $v(x)$  interpolada por funções  $N_i$  do 3º grau (vide item 3.1.1) tem realmente este grau pois deve satisfazer a condição de equilíbrio  $EI \frac{d^4v}{dx^4} = 0 \quad (q = 0)$ .

Em outras palavras, as características de rigidez do elemento de quadro realmente representam a rigidez do meio contínuo na região do elemento.

- 2) Como foi visto no estudo dos quadros planos (veja item 1.10) a solução de quadros com carregamento ao longo das barras é dividida em duas etapas:

(I) Estrutura com cargas nodais combinadas, que são obtidas pela soma de cargas nodais e forças equivalentes nodais. As forças equivalentes nodais são forças de engastamento perfeito com sentidos opostos.

Esta etapa é inteiramente análoga ao método dos elementos finitos pois, para barras prismáticas, a determinação das forças equivalentes nodais pelo método dos elementos finitos (igualdade de trabalhos) recai nas forças de engastamento perfeito com sentidos opostos como mostrado no item 3.3.

(II) Estrutura com cargas ao longo das barras e forças de engastamento perfeito.

A solução para os deslocamentos nodais pelo método dos elementos finitos em quadros (etapa I) é igual à da estrutura real ((I) + (II)) pois os deslocamentos nodais da etapa (II) são nulos.

Para os deslocamentos ao longo das barras, a solução pelo método dos elementos finitos (função do 3º grau) tem caráter aproximado em relação à solução real ((I) + (II)) para as barras carregadas e é igual as barras descarregadas.

Para outros tipos de elementos (bi ou tridimensionais), os resultados obtidos para os deslocamentos nodais pelo método dos elementos finitos são uma aproximação dos deslocamentos de estrutura real, isto é, não são exatos. Isto porque as forças equivalentes nodais não têm nada a ver com as forças de engastamento perfeito do elemento, e também porque as características de rigidez dos elementos são uma aproximação para as características de rigidez do meio contínuo na região de cada elemento.

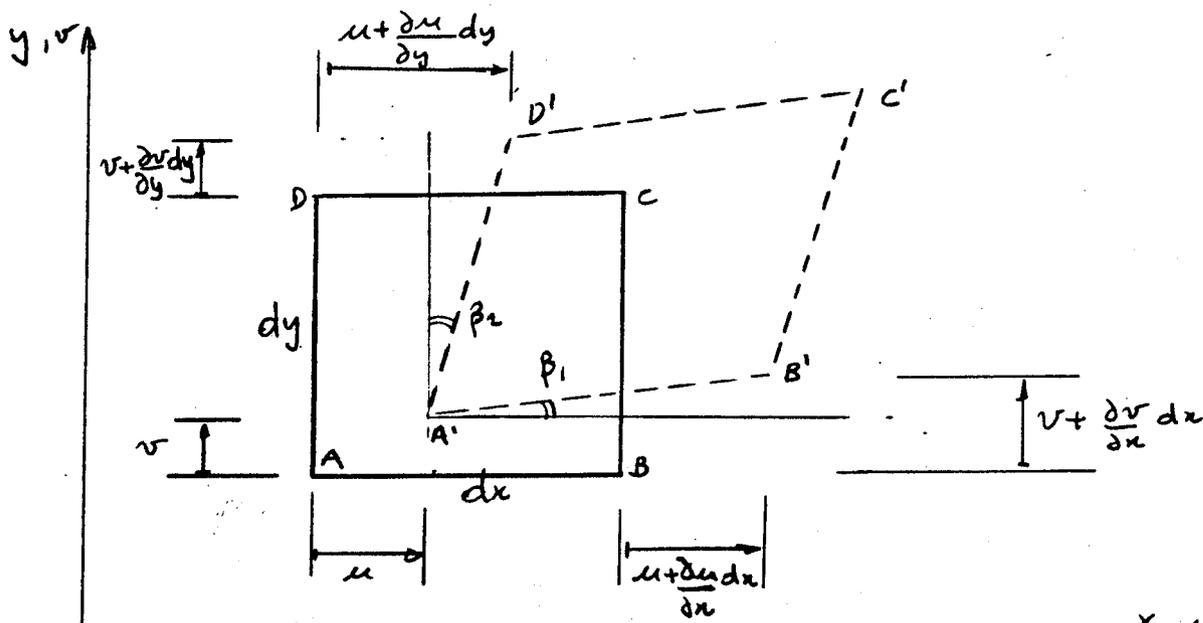
#### 4.2. Equações Fundamentais da Teoria da Elasticidade

(Caso Plano)

Três sistemas de equações da teoria da elasticidade são necessários para a formulação da matriz de rigidez do elemento finito. Estes sistemas serão descritos, para o caso plano, como se segue.

##### 4.2.1. Relações entre Deslocamentos e Deformações

Considere os deslocamentos e deformações de um paralelepípedo infinitesimal:



Da figura temos (hipótese de pequenos deslocamentos):

$$\overline{A'B'} \approx dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad \overline{AB} = dx$$

Deformação normal na direção  $x$  é definida como:

$$\epsilon_x = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} \quad \boxed{\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}} \quad \text{Para a direção } y:$$

$$\overline{A'D'} \approx dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad \overline{AD} = dy$$

$$\epsilon_y = \frac{\overline{A'D'} - \overline{AD}}{\overline{AD}} \quad \boxed{\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}}$$

Deformação por cisalhamento ou distorção é definida como:

$$\gamma_{xy} = \beta_2 + \beta_1 = \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy) - u}{dy} + \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx) - v}{dx}$$

$$\boxed{\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}}$$

Podemos mostrar as expressões acima sob a forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \boxed{\underline{\epsilon} = \underline{D} \underline{u}}$$

onde a matriz  $\underline{D}$  é um operador diferenciação.

Satisfazer a expressão acima significa garantir a compatibilidade de deslocamentos (nenhum vazio) em cada ponto  $(xy)$  do meio contínuo.

Em particular esta expressão vai ser imposta para os pontos do interior de um elemento finito.

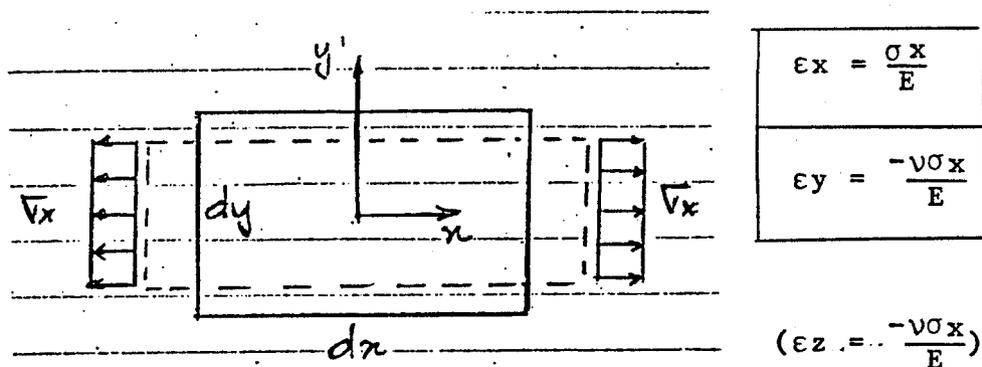
#### 4.2.2. Leis Constitutivas do Material - Relações Tensões x Deformações

Vamos considerar o material isotrópico, elástico e linear, isto é, é válida a lei de Hooke.

Para o caso plano existem o estado plano de tensões e o estado plano de deformações. Os dois vão ser tratados.

##### 4.2.2.1. Estado Plano de Tensões

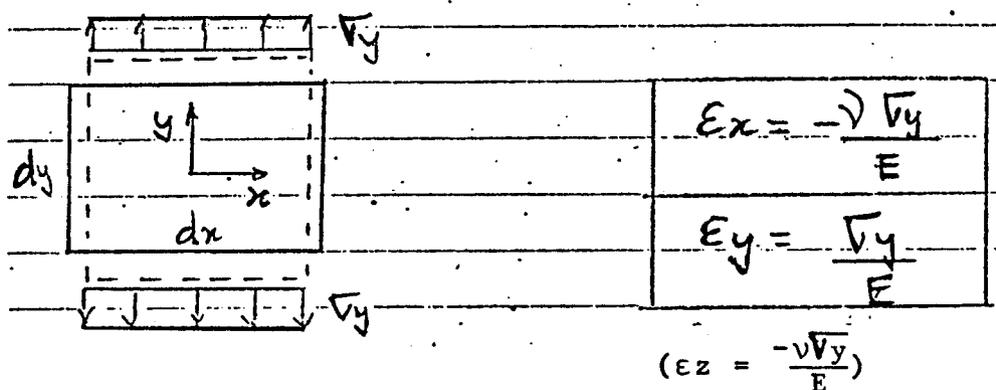
Tensões normais  $\underline{\sigma}_x$  provocam:



$E \rightarrow$  módulo de elasticidade

$\nu \rightarrow$  coeficiente de Poisson ( $\nu \leq 0,5$ )

Tensões normais  $\underline{\sigma}_y$  provocam:

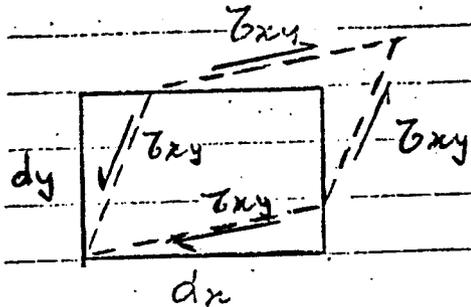


Tensões normais  $\underline{\sigma}_z = 0$

Tensões de cisalhamento  $\underline{\tau}_{x y}$  provocam:

( $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  como veremos mais tarde)

Este efeito é considerado desacoplado do efeito de tensões normais



$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$G \rightarrow$  módulo de elasticidade transversal (ou módulo de cisalhamento)  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

As outras tensões de cisalhamento são nulas:

$$\tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$$

As relações tensão x deformação podem ser escritas sob a forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Invertendo a expressão acima temos:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Estado pla-} \\ \text{no de ten-} \\ \text{sões} \end{array}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

#### 4.2.2.2. Estado Plano de Deformações

Isto ocorre por exemplo quando se analisa a seção transversal de uma barragem, onde não há deformações perpendiculares, ao ponto da seção ( $\epsilon_z = 0$ ;  $\gamma_{xy} = \gamma_{zx} = 0$ )

$$\text{Sabemos que } \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0$$

$$\text{Daí: } \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (\neq 0)$$

Assim,

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z]$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu^2(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$= \frac{1 + \nu}{E} [(1 - \nu)\sigma_x - \nu\sigma_y]$$

Analogamente,

$$\epsilon_y = \frac{1 + \nu}{E} [(1 - \nu)\sigma_y - \nu\sigma_x]$$

Podemos colocar de forma mais conveniente:

$$\begin{array}{|l} \epsilon_x = \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1 \sigma_y) \\ \epsilon_y = \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \nu_1 \sigma_x) \end{array} \quad \text{onde } \boxed{E_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)}} \quad \text{e} \quad \boxed{\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}}$$

O efeito de distorção é desacoplado e então:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

$$\text{Observa-se que } \frac{2(1+\nu_1)}{E_1} = \frac{2(1+\nu)}{E}$$

$$\text{e assim, } \boxed{\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu_1)}{E_1} \tau_{xy}}$$

Escrevendo sob a forma matricial e invertendo temos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E_1}{(1-\nu_1^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_1 & 0 \\ \nu_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu_1)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Estado Plano de defor} \\ \text{mação} \end{array}$$

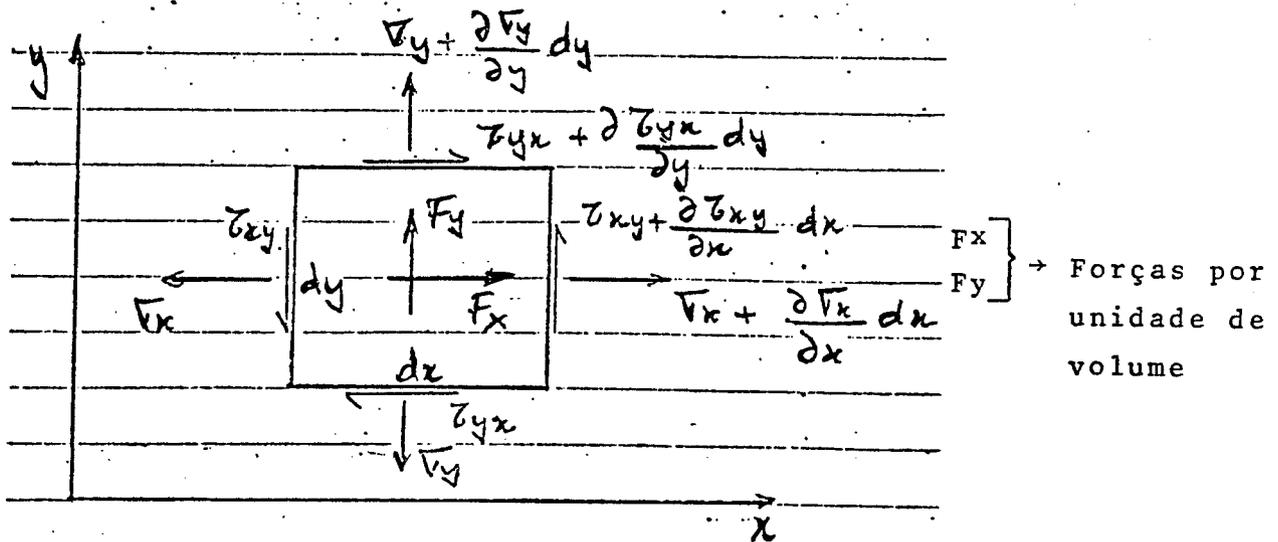
Observa-se que a matriz acima tem a mesma forma da matriz para estado plano de tensões, trocando-se  $E$  por  $E_1$  e  $\nu$  por  $\nu_1$ .

Genericamente vamos ter  $\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\epsilon}$ , válido para os dois casos onde  $\underline{E}$  tem a seguinte forma:

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{simétrica})$$

#### 4.2.3. Equações Diferenciais de Equilíbrio

Seja um elemento infinitesimal com espessura  $t$ .



Desprezando os termos de ordens superiores temos:

$$\sum M_z = 0 \rightarrow \tau_{xy} dy t dx - \tau_{yx} dx t dy = 0$$

$$\therefore \boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -\sigma_x t dy + (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) t dy - \tau_{xy} t dx +$$

$$+ (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy) t dx + F_x dx dy t = 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow$$

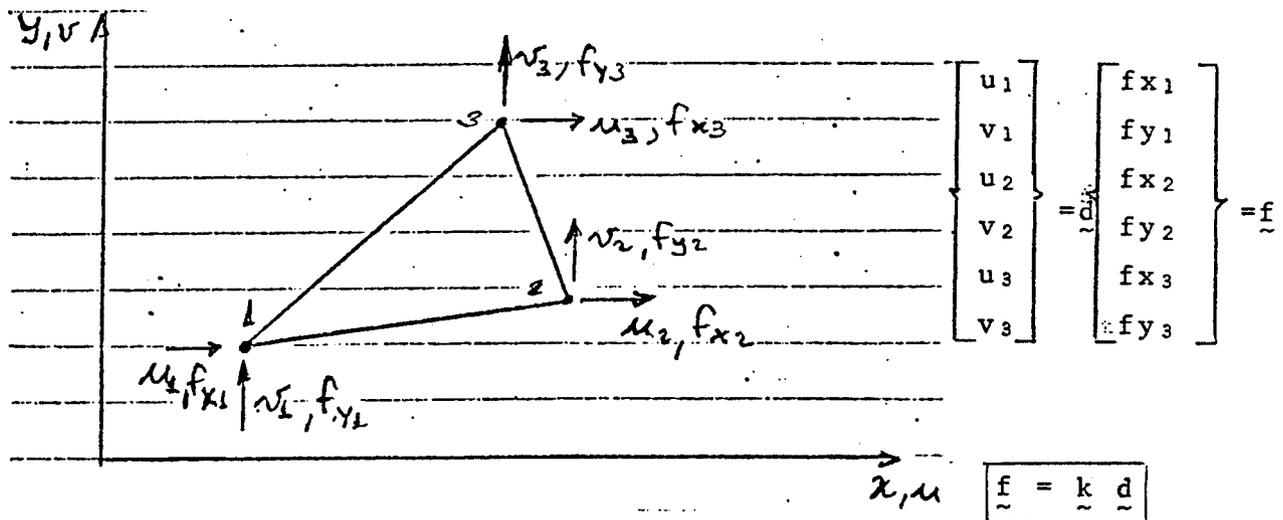
$$-\sigma_x t dx + (\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy) t dx - \tau_{xy} t dy + (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}) t dy +$$

$$+ F_y dx dy t = 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0}$$

#### 4.3. Matriz de Rigidez do Elemento Finito Triangular de Deformação Constante (k)

Seja o elemento finito abaixo, utilizado para discretizar o meio contínuo.



Pontos Nodais  $\begin{cases} 1 \rightarrow (x_1, y_1) \\ 2 \rightarrow (x_2, y_2) \\ 3 \rightarrow (x_3, y_3) \end{cases}$  Queremos determinar k

##### 4.3.1. Matriz das Funções de Forma (N)

Para o caso plano cada nó tem dois deslocamentos (graus de liberdade).

A cada elemento ficam, então, associados 6 graus de liberdade.

Vamos assumir que tanto o deslocamento  $u$  quando  $v$  variam linearmente dentro do elemento, isto é, na forma mais simples. Desse modo:

$$u = a_1 + a_2x + a_3y$$

$$v = a_4 + a_5x + a_6y$$

As deformações dentro do elemento ficam:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a_2 ; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = a_6 \quad e \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_3 + a_5$$

(daí o nome "triângulo de deformação constante")

Poderíamos representar matricialmente:

$$\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{u}(x,y) = \underline{X} \underline{a}} \quad (1)$$

Para os pontos nodais temos:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \underline{a}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} \cdot \underline{a}$$

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \underline{a}$$

Condensando em uma mesma matriz

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad \boxed{\underline{d} = \underline{C} \underline{a}}$$

Podemos obter  $\underline{a}$  em função de  $\underline{d}$ :

$$\boxed{\underline{a} = \underline{C}^{-1} \underline{d}} \quad (2) \quad \text{onde,}$$

$$\underline{C}^{-1} = \frac{1}{2\Delta}$$

$(x_2 y_3 - x_3 y_2)$	0	$(-x_1 y_3 + x_3 y_1)$	0	$(x_1 y_2 - x_2 y_1)$	0
$(y_2 - y_3)$	0	$(y_3 - y_1)$	0	$(y_1 - y_2)$	0
$(x_3 - x_2)$	0	$(x_1 - x_3)$	0	$(x_2 - x_1)$	0
0	$(x_2 y_3 - x_3 y_2)$	0	$(-x_1 y_3 + x_3 y_1)$	0	$(x_1 y_2 - x_2 y_1)$
0	$(y_2 - y_3)$	0	$(y_3 - y_1)$	0	$(y_1 - y_2)$
0	$(x_3 - x_2)$	0	$(x_1 - x_3)$	0	$(x_2 - x_1)$

onde

$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \text{área do triângulo}$$

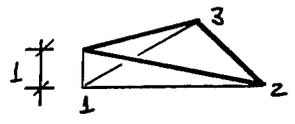
Substituindo (2) e (1), temos os deslocamentos no interior do elemento em função dos deslocamentos nodais:

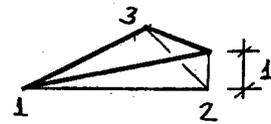
$$\underline{u}(x,y) = \underline{X} \underline{C}^{-1} \underline{d} \quad \rightarrow \quad \boxed{\underline{u}(x,y) = \underline{N} \underline{d}}$$

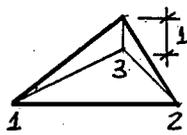
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$\underline{N}$   $\rightarrow$  é a matriz das funções de forma

As funções  $N_i$  são as funções de forma:

$$N_1 = \frac{1}{x_2 y_3} (x_2 y_3 - y_3 x - x_2 y + x_3 y)$$


$$N_2 = \frac{1}{x_2 y_3} (y_3 x - x_3 y)$$


$$N_3 = \frac{1}{y_3} y$$


4.3.2. Matriz que Relaciona Deformação com Deslocamentos Nodais (B)

As deformações dentro do elemento ficam determinados pelas relações deslocamentos x deformações (vide item 4.2.1).

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{u}} \rightarrow \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{N}} \underline{\underline{d}} \rightarrow \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{X}} \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{d}} \rightarrow \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{d}}$$

onde  $\underline{\underline{D}}$  é um operador diferenciação.

Assim,  $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{X}} \underline{\underline{C}}^{-1}$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \underline{\underline{C}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\underline{C}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{B}} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3) & 0 & (y_3 - y_1) & 0 & (y_1 - y_2) & 0 \\ 0 & (x_3 - x_2) & 0 & (x_1 - x_3) & 0 & (x_2 - x_1) \\ (x_3 - x_2) & (y_2 - y_3) & (x_1 - x_3) & (y_3 - y_1) & (x_2 - x_1) & (y_1 - y_2) \end{bmatrix}$$

$\Delta \rightarrow$  área do elemento triangular.

Outra maneira de calcular  $\underline{\underline{B}}$  seria por  $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{N}}$ .

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial N_1/\partial x & 0 & \partial N_2/\partial x & 0 & \partial N_3/\partial x & 0 \\ 0 & \partial N_1/\partial y & 0 & \partial N_2/\partial y & 0 & \partial N_3/\partial y \\ \partial N_1/\partial y & \partial N_1/\partial x & \partial N_2/\partial x & \partial N_2/\partial y & \partial N_3/\partial y & \partial N_3/\partial x \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Observe que as deformações são constantes dentro do elemento.

#### 4.3.3. Tensões Dentro do Elemento

Pelo item 4.2.2 temos que  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\epsilon}}$  ou

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{onde } \underline{\underline{E}} \text{ depende}$$

de termos estado plano de tensões ou de deformações. Podemos expressar as tensões em função dos deslocamentos nodais:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{d}} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{H}} \underline{\underline{d}} \quad \text{onde } \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{B}}$$

Observe que as tensões são constantes dentro de um elemento pois  $\underline{\underline{H}}$  é constante, e  $\underline{\underline{d}}$  depende de  $\underline{\underline{E}}$  e das coordenadas dos nós:

$$\underline{\underline{H}} = \frac{1}{2\Delta} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline E_{11}(y_2-y_3) & E_{12}(x_3-x_2) & E_{11}(y_3-y_1) & E_{12}(x_1-x_3) & E_{11}(y_1-y_2) & E_{12}(x_2-x_1) \\ \hline E_{21}(y_2-y_3) & E_{22}(x_3-x_2) & E_{21}(y_3-y_1) & E_{22}(x_1-x_3) & E_{21}(y_1-y_2) & E_{22}(x_2-x_1) \\ \hline E_{33}(x_3-x_2) & E_{33}(y_2-y_3) & E_{33}(x_1-x_3) & E_{33}(y_3-y_1) & E_{33}(x_2-x_1) & E_{33}(y_1-y_2) \\ \hline \end{array}$$

$\Delta \rightarrow$  área do triângulo

#### 4.3.4. Determinação da Matriz de Rigidez por Aplicação do Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV)

Este princípio diz que:

"O trabalho virtual realizado pelos esforços externos é igual ao trabalho virtual realizado pelos esforços (ou tensões) internos, se o sistema estiver em equilíbrio, e se os deslocamentos virtuais internos forem compatíveis com as deformações virtuais internas".

O princípio pode ser expresso por:

$$\begin{array}{c} \text{equilíbrio} \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \Sigma \delta D F = \int_V \delta \epsilon \sigma dV \\ \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ \text{compatíveis} \end{array} \quad \boxed{\delta W_E = \delta U}$$

$\delta D$  = deslocamentos virtuais externos

$F$  = forças externas

$\delta \epsilon$  = deformações virtuais internas

$\sigma$  = tensões internas

Como o campo de deslocamentos virtuais (e correspondentes de deformações) é arbitrário e sempre escolhido compatível, a imposição do PDV estabelece uma condição de equilíbrio para o campo de forças (e correspondentes tensões).

Como as tensões podem ser escritas em função dos deslocamentos nodais, a imposição do PDV leva a uma relação entre forças externas (nodais) e deslocamentos nodais que satisfaz o equilíbrio global do elemento. Esta relação, representada pela matriz de rigidez do elemento, leva também em consideração a lei de variação assumida para os deslocamentos dentro do elemento e

suas propriedades elásticas.

No caso do elemento triangular temos:

$$F \rightarrow \underline{f} = \begin{Bmatrix} fx_1 \\ fy_1 \\ fx_2 \\ fy_2 \\ fx_3 \\ fy_3 \end{Bmatrix} \quad \sigma \rightarrow \underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Como sã temos forças externas nos nã os deslocamentos virtuais externas que interessam os deslocamentos virtuais nodais:

$$\delta D \rightarrow \delta \underline{d} = \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta v_1 \\ \delta u_2 \\ \delta v_2 \\ \delta u_3 \\ \delta v_3 \end{Bmatrix} \quad \delta \epsilon \rightarrow \delta \underline{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \delta \epsilon_x \\ \delta \epsilon_y \\ \delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

O campo de deslocamentos virtuais escolhido é tal que  $\delta \underline{\epsilon} = \underline{B} \delta \underline{d}$  sendo que  $\underline{B}$  foi definido anteriormente e corresponde a uma variação linear dos deslocamentos virtuais dentro do elemento. Este campo é compatível dentro do elemento.

Impondo o PDV temos:

$$\delta \underline{d}^T \underline{f} = \int_V \delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} dV$$

$$\delta \underline{d}^T \underline{f} = \int_V \delta \underline{d}^T \underline{B}^T \underline{\sigma} dV$$

$$\delta \underline{d}^T \underline{f} = \int_V \delta \underline{d}^T \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} \underline{d} dV$$

$$\delta \underline{d}^T \underline{f} = \delta \underline{d}^T \left[ \int_V \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} dV \right] \underline{d}$$

Podemos eliminar  $\delta \underline{d}^T$  pois é arbitrário e pode ser diferente de zero.

Como pode ser observado nos itens anteriores, as matrizes  $\underline{B}$  e  $\underline{E}$  são constantes dentro do elemento. Assim:

$$\underline{f} = \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} t \Delta \underline{d}$$

sendo  $\underline{t}$  a espessura do elemento e

$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \text{área do triângulo}$$

A espessura  $t$  adotada no caso plano de tensões é a real.

No caso de estado plano de deformação deve-se adotar  $\underline{t} = 1$  e obter os resultados por metro de comprimento (de barragem por exemplo).

Da relação acima tiramos:

$$\underline{f} = \underline{k} \underline{d}$$

$$\underline{k} = \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} t \Delta$$

$\underline{k}_{6 \times 6}$

$\underline{k}$  é mostrado na página seguinte.

$E_{11}(y_2 - y_3)^2$			
$+ E_{33}(x_3 - x_2)^2$			
$E_{21}(x_3 - x_2)(y_2 - y_3)$	$E_{22}(x_3 - x_2)^2$		
$+ E_{33}(x_3 - x_2)(y_2 - y_3)$	$+ E_{33}(y_2 - y_3)^2$		
( S I M É T R I C A )			
$E_{11}(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$	$E_{12}(x_3 - x_2)(y_3 - y_1)$	$E_{11}(y_3 - y_1)^2$	
$+ E_{33}(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)$	$+ E_{33}(x_1 - x_3)(y_2 - y_3)$	$+ E_{33}(x_1 - x_3)^2$	
$E_{21}(x_1 - x_3)(y_2 - y_3)$	$E_{22}(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)$	$E_{12}(x_1 - x_3)(y_3 - y_1)$	$E_{22}(x_1 - x_3)^2$
$+ E_{33}(x_3 - x_2)(y_3 - y_1)$	$+ E_{33}(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$	$+ E_{33}(x_1 - x_3)(y_3 - y_1)$	$+ E_{33}(y_3 - y_1)^2$
$E_{11}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)$	$E_{12}(x_3 - x_2)(y_1 - y_2)$	$E_{11}(y_1 - y_2)(y_3 - y_1)$	$E_{12}(x_1 - x_3)(y_1 - y_2)$
$+ E_{33}(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$	$+ E_{33}(x_2 - x_1)(y_2 - y_3)$	$+ E_{33}(x_1 - x_3)(x_2 - x_1)$	$+ E_{33}(x_2 - x_1)^2$
$E_{21}(x_2 - x_1)(y_2 - y_3)$	$E_{22}(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$	$E_{12}(x_2 - x_1)(y_3 - y_1)$	$E_{22}(x_1 - x_3)(x_2 - x_1)$
$+ E_{33}(x_3 - x_2)(y_1 - y_2)$	$+ E_{33}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)$	$+ E_{33}(x_1 - x_3)(y_1 - y_2)$	$+ E_{33}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2)$
			$E_{22}(x_2 - x_1)^2$
			$+ E_{33}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2)$
			$+ E_{33}(y_1 - y_2)(y_1 - y_2)$
			$+ E_{33}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2)$
			$+ E_{33}(y_1 - y_2)(y_1 - y_2)$

$$k \approx -\frac{E}{4\Delta}$$

#### 4.4. Resumo e Conclusões

O que mais queremos salientar ao estudante que pela primeira vez se depara com o método dos elementos finitos (MEF) é a poderosa ferramenta que este representa.

O grande problema do engenheiro estrutural estaria em estabelecer condições seguras, práticas e econômicas de um sistema estrutural deformável resistir aos esforços e solicitações que lhe são impostas. Em outras palavras, o engenheiro deve estabelecer relações entre as solicitações e os deslocamentos e deformações e verificar se estes deslocamentos e os esforços internos (ou tensões) atendem às condições acima descritas.

Quando o sistema estrutural é composto por elementos estruturais basicamente unidimensionais (quadros, grelhas, etc.) as relações forças-deslocamentos podem ser determinadas utilizando-se as hipóteses simplificadoras da Resistência dos Materiais. Para sistemas contínuos, ou para problemas mais gerais, a análise estrutural só pode ser feita tendo como base a Teoria da Elasticidade. As equações da teoria da elasticidade, exemplificadas pelas equações fundamentais do caso plano, elástico e linear mostradas no item 4.2, teriam que ser integradas ao longo do meio contínuo e, depois de introduzidas as condições de contorno, forneceriam as relações desejadas. Esta solução, analítica, requer um trabalho matemático enfadonho e, por muitas vezes, virtualmente impossível de ser concluído.

O MEF vem apresentar uma solução numérica e aproximada para o problema introduzido pela teoria da elasticidade. No entanto, o engenheiro tem controle sobre o grau de aproximação quando se deseje, tendo como limites o custo e a capacidade do ferramental computacional disponível.

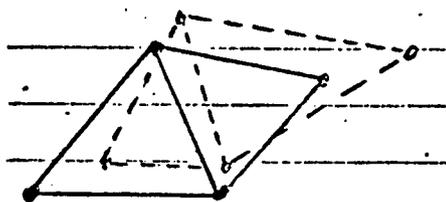
No MEF o meio contínuo é discretizado em pequenos, mas finitos, elementos, onde se estabelece de forma aproximada as relações entre as forças sobre os nós do elemento e os deslocamentos destes nós. O importante a se observar é que, uma vez estabelecidas estas relações a nível de elemento, o agrupamento dos elementos, recompondo o meio contínuo, e a consequente determinação das relações força-deslocamento (aproximadas) a nível de estrutura se processam de maneira exatamente análoga à que é feita para o ca-

so de elementos unidimensionais (quadros, grelhas, etc.). As condições de contorno também são consideradas de forma análoga.

O grau de aproximação depende do número de elementos que são considerados: quando mais, mais próxima da solução real está a resposta pelo MEF. No entanto quanto mais elementos, mais graus de liberdade tem o problema e a solução torna-se mais cara e de difícil implementação prática. O engenheiro, então, deve estabelecer o grau de precisão tendo como parâmetros de um lado os resultados confiáveis e do outro o custo e a implementação prática da análise.

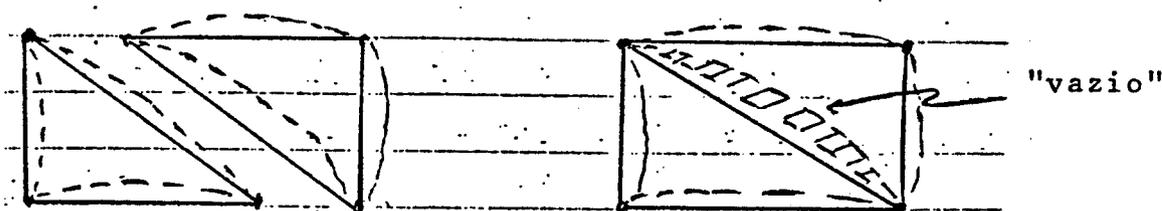
Em seguida são resumidas as principais considerações do MEF no que diz respeito a condições de equilíbrio, a compatibilidade de deslocamentos e às leis constitutivas do material, e em que a sua solução diferencia de uma solução analítica do mesmo problema pela teoria da elasticidade:

- 1º) Os deslocamentos dos pontos do meio contínuo pelo MEF tem caráter aproximado em relação aos deslocamentos reais dados pela teoria da elasticidade. Uma lei de variação é suposta para estes deslocamentos dentro de cada elemento. Por exemplo, no caso do elemento triangular de deformação constante é assumida uma variação linear para os deslocamentos dentro do elemento. A função de deslocamentos muda de elemento para elemento, mas, neste caso, sempre de forma linear.
- 2º) As condições de compatibilidade de deslocamentos dentro de cada elemento ficam satisfeitas se as funções que interpolam os deslocamentos dentro do elemento forem contínuas.
- 3º) Compatibilidade de deslocamentos de um elemento para outro é forçada somente nos nós, o que é óbvio: os elementos são conectados uns com os outros pelos nós.
- 4º) Compatibilidade de deslocamentos pode ou não ser satisfeita ao longo da fronteira entre dois elementos. Isto vai depender da função de interpolação escolhida para os deslocamentos e do número de nós (graus de liberdade) na fronteira. Assim é que no caso de elementos triangulares com variação linear para os deslocamentos as fronteiras permanecem retas depois de deformadas, e a compatibilidade forçada nos nós implica na compatibilidade ao longo da fronteira como mostrado abaixo:



— forma inicial  
 - - - forma depois de defor-  
 mado

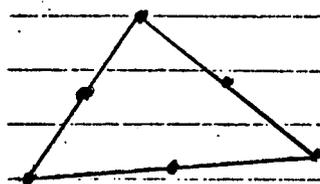
Se os deslocamentos dentro do elemento fossem aproximados por funções de maior ordem porderiam ocorrer aparecer "vazios" na fronteira, não satisfazendo a compatibilidade. Isto é mostra do abaixo.



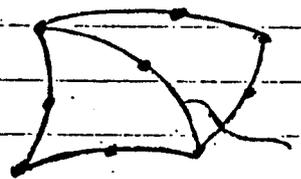
Elemento triangular com deslocamentos do 2º grau

Elementos que satisfazem automaticamente compatibilidade ao longo da fronteira são chamados elementos "conformes" ou compatíveis. Os que não sарisfazem são chamados "não-conformes" ou incompatíveis.

Outros exemplos de elementos conformes:

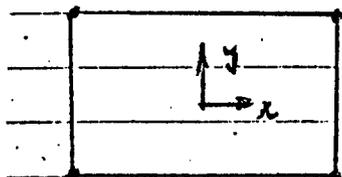


Triângulo baseado em função de deslocamentos do 2º grau (2 graus de liberdade por nó)

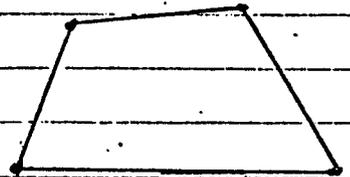


Fronteira compatível.

(uma parábola do 2º grau fica definida por 3 pontos).



Elemento retangular chamado "bilinear":



Fronteiras permanecem retas depois de deformadas.

$$u(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy$$

$$v(x,y) = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy$$

Elementos não-conformes podem ser aceitos e em alguns casos podem até fornecer melhores resultados que os elementos com patíveis.

- 59) As leis constitutivas do material (relações tensões-deformação  $\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\epsilon}$ ) são "extrapoladas" do nível infinitesimal, como são aplicados pela teoria da elasticidade, para o nível de elemento finito. Os resultados desta "extrapolação" são as relações entre as forças nodais do elemento e os deslocamentos nodais, relações estas representadas pela matriz de rigidez do elemento ( $\underline{k}$ ), tal que:

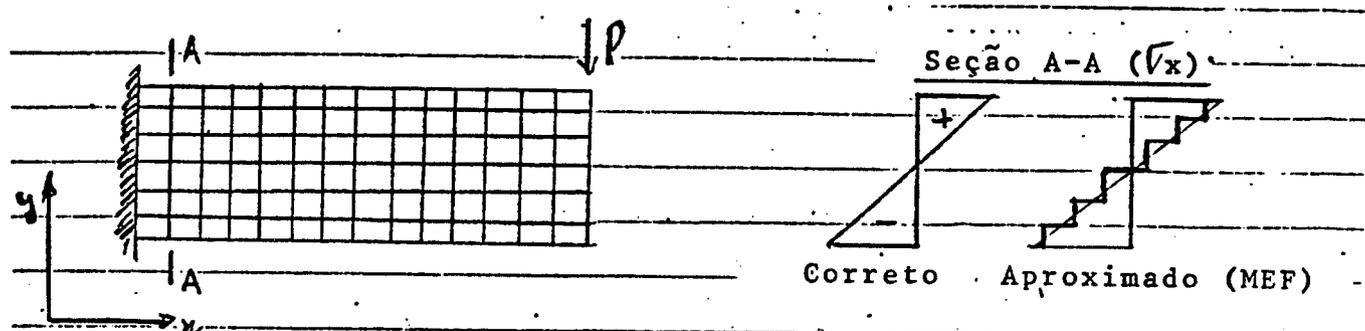
$$\underline{f} = \underline{k} \underline{d} \quad (\underline{k} = \int_{vol} \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} dV)$$

Estas relações  $\underline{f} = \underline{k} \underline{d}$  são tais que satisfazem o equilíbrio global do elemento e são determinadas tomando como base a lei de variação escolhida para os deslocamentos dentro do elemento.

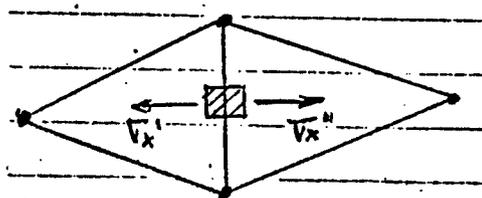
- 69) As forças que atuam dentro do elemento são transportados para os nós consistentemente com a lei da variação assumida para os deslocamentos.
- 79) As equações diferenciais de equilíbrio da teoria da elasticidade normalmente não são satisfeitas dentro do elemento. No caso de elementos de deformação constante, e como não atuam forças dentro do elemento estas equações (mostradas a baixo) ficam satisfeitas.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

A nível global, no entanto, as tensões dentro de cada elemento tendem à resposta correta (que satisfaz as equações da teoria da elasticidade), como por exemplo o que é mostrado abaixo:

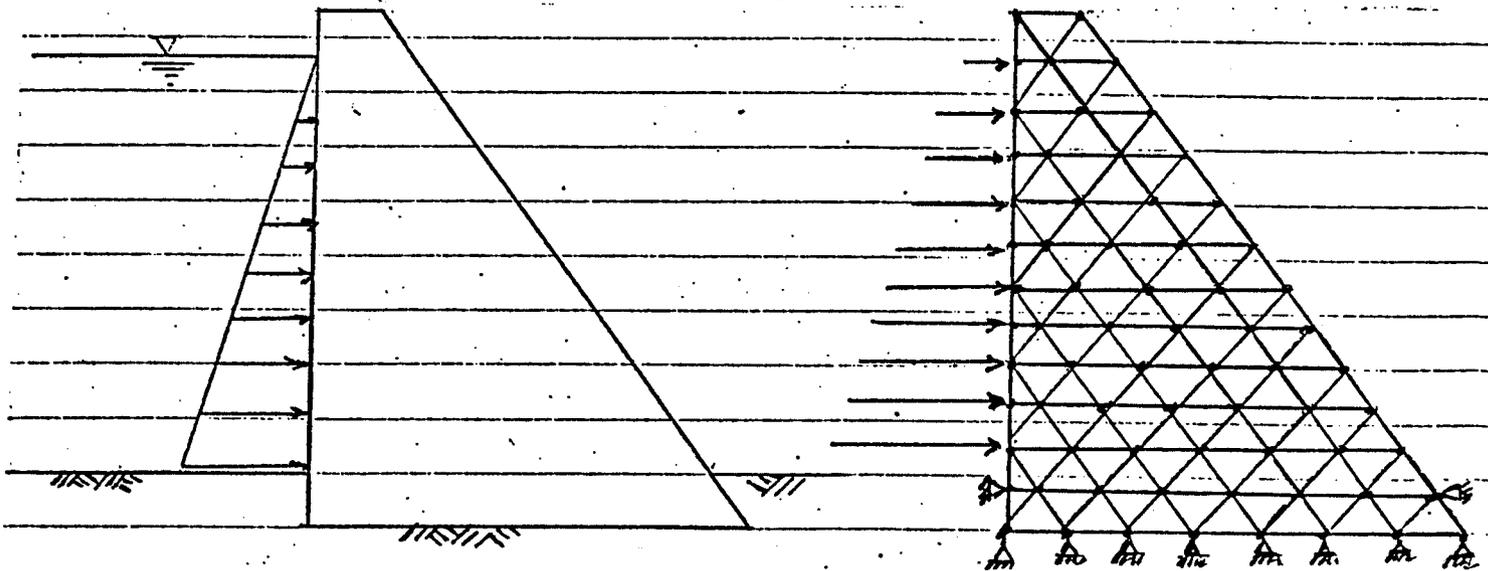


- 89) Equilíbrio normalmente não é satisfeito de elemento para elemento. Por exemplo na fronteira entre dois elementos triangulares as tensões de um lado são diferentes da do outro, como mostrado abaixo.



$$\sigma_{x'} \neq \sigma_{x''}$$

- 99) As condições de equilíbrio são impostas a nível de nó, isto é, equilíbrio de forças (e momentos) nodais é satisfeito. As equações finais a nível de estrutura  $\underline{K} \underline{D} = \underline{F}$  são equações de equilíbrio nodal, e os deslocamentos  $\underline{D}$  (solução) são tais que resultantes de forças e momentos nos nós são nulas.
- 109) Condição de contorno em deslocamentos e forças no contorno do meio contínuo são impostos somente aos nós do contorno, como exemplificado pela barragem abaixo.



Finalmente, gostaríamos de salientar alguns aspectos que diferenciam a análise de elementos finitos unidimensionais, (quadros, grelhas, etc.) da análise para elementos bi ou tridimensionais.

- 1) As funções que interpolam os deslocamentos dentro do elemento de quadro são as funções exatas (dentro das hipóteses da resistência dos materiais) quando temos barras prismáticas (propriedades constantes ao longo do comprimento e carregamento só nos nós (barras descarregadas).
- 2) Por esse motivo, e para barras prismáticas, a matriz de rigidez do elemento de barra representa realmente (sem aproximação) as características de rigidez do meio na região do elemento.
- 3) Também para barras prismáticas, as forças que atuam ao longo das barras e que são transportadas para os nós (forças equivalentes nodais) são iguais às forças de engastamento perfeito com sentidos opostos.
- 4) Por esses motivos (1, 2 e 3), a análise da estrutura para as cargas nodais combinadas (cargas nodais mais forças equivalentes nodais) tem como resultado para os deslocamentos nodais os valores exatos (dentro das hipóteses da resistência dos materiais).
- 5) No caso específico das estruturas compostas por barras, as tensões internas (esforços internos) são determinadas pela soma de dois casos:
  - (I) Análise da estrutura para as cargas nodais combinadas.
  - (II) Esforços internos devido às cargas que atuam ao longo das barras e forças de engastamento perfeito.

Os esforços internos resultantes são exatos.

No caso dos elementos finitos bi ou tridimensionais somente a fase I é feita na análise.

5. REFERÊNCIAS

01 - "Structural Engineering". White, R.N.; Gergely, P; Sexsmith, R.G. Volumes 1 e 2 (Edição Combinada).

02 - "Matrix Analysis of Framed Structures", Weaver, W.; Gere, J. M. 2a. Edição.

03 - "Matrix Structural Analysis". Mc Guire, W.; Gallagher, R.

04 - "Matrix Methods of Structural Analysis". Wang, C.K.

05 - "Concepts and Applications of Finite Element Analysis". Cook, R.D. 2a. Edição.

06 - "Matrix Structural Analysis". Meek, J.L.

07 - "Structural Systems - Statics, Dynamics and Stability". Rubinstein, M.F.

08 - "Mechanics of Materials". Timoshenko, S.P.; Gere, J.M.

09 - "Energy Principles in Structural Mechanics". Tauchert, T.R.

10 - Considerações Sobre Equilíbrio e Compatibilidade Estrutural. Pietro Candraeva. Editora do Grêmio Politécnico.

11 - Caderno de Estruturas nº 5 - Introdução ao Método dos Elementos Finitos. José de Almendra Freitas Neto; Inaldo Ayres Vieira; Shido Ogura; Moacir Hissayassu Inove. Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Departamento de Construção Civil.