

## T1: Simulação computacional do Método das Forças

### 1ª questão do grau G1 (1.0 ponto) – Data da entrega: 21/08/2019

Estude o exemplo de solução de um pórtico com dois hiperestáticos pelo Método das Forças que foi visto em sala de aula (“[http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp\\_pub/lfm/eng1204roteiroMF.pdf](http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp_pub/lfm/eng1204roteiroMF.pdf)”). Obtenha a programa Ftool e seu manual em “<http://www.ftool.com.br>”. Assista o vídeo “Aula 02: Introdução ao Método das Forças” no site da disciplina no Ambiente de Aprendizagem Online da PUC-Rio: “<https://ead.puc-rio.br/login/index.php>”. Estude o tutorial sobre o Método das Forças em “[http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp\\_pub/lfm/metfor1\\_0\\_0.exe](http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp_pub/lfm/metfor1_0_0.exe)” (versão *off-line*). Siga os passos descritos nos itens abaixo e escreva um relatório. Este relatório deve conter as figuras que forem necessárias para descrever a simulação e seus valores numéricos.

#### Item (a) – Estrutura original a ser resolvida

Defina arbitrariamente, usando o programa Ftool, um quadro plano hiperestático com grau de hiperestaticidade no mínimo igual a quatro ( $g \geq 4$ ) e que não contenha ciclos fechados de barras. Defina também as propriedades elásticas e geométricas das barras e as cargas que atuam no quadro. Adote todas as unidades em kN e m. Crie uma figura com a estrutura, suas dimensões e todas as propriedades e cargas utilizadas. Essa figura deve mostrar a configuração deformada da estrutura, com as componentes de reação de apoio indicadas. Anote nessa figura as componentes de reações de apoio que serão escolhidas como incógnitas da solução da estrutura pelo Método das Forças. Estas incógnitas são chamadas de *hiperestáticos* e devem ser identificadas pelo nome  $X_j$ , sendo  $j$  o número do hiperestático. Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os hiperestáticos com seus nomes, valores e unidades à mão. Anote os valores das reações de apoio (com sinal) selecionadas como incógnitas do problema para usar no item (f).

#### Item (b) – Sistema Principal

Obtenha uma estrutura isostática a partir da eliminação dos vínculos externos (liberação de restrições de apoio) associados aos hiperestáticos escolhidos no item (a). Essa estrutura será o Sistema Principal (SP) para a resolução do quadro original hiperestático pelo Método das Forças. Crie uma figura com o SP adotado e os hiperestáticos com seus nomes. Embora seja possível, neste trabalho não libere vínculos internos, isto é, não introduza rótulas.

#### Item (c) – Caso básico (0)

Para o Sistema Principal do item (b) considere valores nulos para os hiperestáticos e aplique o carregamento externo do item (a). Isto corresponde ao caso (0) do Método das Forças. Mostre a configuração deformada dessa estrutura juntamente com o carregamento aplicado, indicando as componentes de deslocamentos e rotações (com valores e unidades) nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos termos de carga  $\delta_{i0}$ . Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores (com sinal) e unidades dos termos de carga à mão.

#### Item (d) – Casos básicos que isolam os hiperestáticos

Retire as cargas utilizadas no item (c) e carregue o Sistema Principal, alternadamente, com os hiperestáticos com valores unitários. Isto deve gerar um caso de carregamento para cada hiperestático (com valor unitário) atuando independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos ( $j$ ) do Método das Forças, onde  $j$  é o número de um hiperestático. Mostre a configuração deformada da estrutura para cada um dos hiperestáticos unitários impostos, indicando as componentes de deslocamentos e rotações (com valores, sinais e unidades) nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos *coeficientes de flexibilidade*  $\delta_{ij}$ . Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores, sinais e unidades dos coeficientes de flexibilidade à mão.

#### Item (e) – Sistema de equações de compatibilidade

Com base nos resultados dos itens (c) e (d), monte o sistema de equações de compatibilidade que resulta da solução do quadro original pelo Método das Forças. Os valores numéricos dos coeficientes deste sistema de equações são obtidos dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade.

#### Item (f) – Verificação da solução do sistema de equações de compatibilidade

Com base nos resultados da estrutura original do item (a), verifique se os valores dos hiperestáticos correspondem realmente à solução do sistema de compatibilidade obtido no item (e).

#### Item (g) – Obtenção de esforços internos

Indique os passos seguintes à solução do sistema de equações de compatibilidade que seriam necessários para complementar o cálculo dos esforços internos da estrutura pelo Método das Forças.

## Grau G1 - 2ª Questão - Data: 21/08/2019 - Duração: 0:50 hs - Sem Consulta

**2ª Questão** (1,0 ponto)

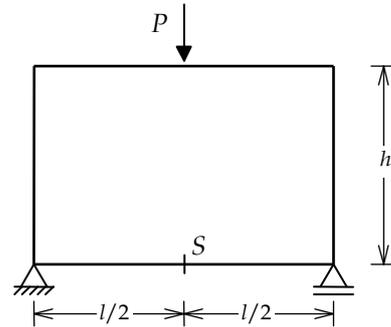
Considere a solução do pórtico plano da figura ao lado pelo Método das Forças.

A unidade para distâncias e deslocamentos é metro [m].

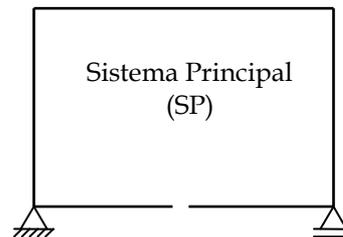
A unidade para forças é kilo-Newton [kN].

A unidade para momentos é kilo-Newton-metro [kNm].

A unidade para rotações é radiano [rad] (adimensional).



Na análise pelo Método das Forças, o Sistema Principal (SP) adotado está mostrado ao lado: o anel (circuito fechado de barras) é cortado, seccionando-o na seção S indicada na figura.



Pede-se:

**Item (a)**

Indique em uma figura os hiperestáticos correspondentes ao SP adotado.

Cada hiperestático é identificado pela seguinte notação:  $X_i$ , em que  $i$  é o seu índice.

Para cada hiperestático, indique se é um esforço externo (reação de apoio) ou um esforço interno.

Se for um esforço externo, indique se o hiperestático é uma força horizontal, uma força vertical ou um momento.

Se for um esforço interno, indique se o hiperestático é um esforço axial (normal), um esforço cortante ou um momento fletor.

Para cada hiperestático, indique sua unidade.

**Item (b)**

Indique em uma figura o aspecto da configuração deformada do caso (0).

Utilize uma escala exagerada para deslocamentos

Nessa figura indique os termos de carga do caso (0) associados ao SP adotado.

Cada termo de carga é identificado pela seguinte notação:  $\delta_{i0}$ , em que  $i$  é o seu índice.

Dê a interpretação física dos termos de carga associados ao SP adotado, isto é:

Para cada termo de carga, indique se é um deslocamento horizontal, um deslocamento axial, um deslocamento vertical, um deslocamento transversal ou uma rotação.

Para cada termo de carga, indique se é uma grandeza absoluta ou relativa.

Para cada termo de carga, indique qual foi o efeito que o provocou.

Para cada termo de carga, indique sua unidade.

**Item (c)**

Indique os coeficientes de flexibilidade associados ao SP escolhido. **Não precisa mostrar em figuras.**

Cada coeficiente de flexibilidade é identificado pela seguinte notação:  $\delta_{ij}$ , em que  $i$  e  $j$  são seus índices.

Dê a interpretação física dos coeficientes de flexibilidade, isto é:

Para cada coeficiente de flexibilidade, indique se é um deslocamento horizontal, um deslocamento axial, um deslocamento vertical, um deslocamento transversal ou uma rotação.

Para cada coeficiente de flexibilidade, indique se é uma grandeza absoluta ou relativa.

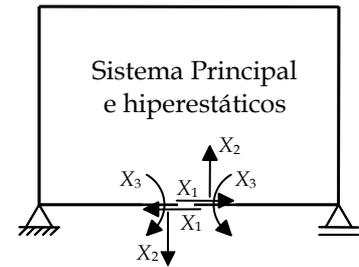
Para cada coeficiente de flexibilidade, indique qual foi o efeito que o provocou.

Para cada coeficiente de flexibilidade, indique sua unidade.

**Item (a)**

Hiperestáticos correspondentes a essa opção do SP:

- $X_1 \rightarrow$  esforço interno axial na seção  $S$  [kN].
- $X_2 \rightarrow$  esforço interno cortante (transversal) na seção  $S$  [kN].
- $X_3 \rightarrow$  momento fletor (esforço interno) na seção  $S$  [kNm].

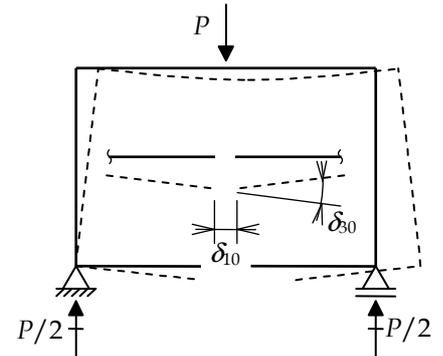


**Item (b)**

Caso (0) - Solicitação externa (carregamento) isolada no SP

Interpretações físicas dos termos de carga:

- $\delta_{10} \rightarrow$  deslocamento axial relativo entre as seções resultantes do corte na seção  $S$ , provocado pela solicitação externa no caso (0) [m].
- $\delta_{20} \rightarrow$  deslocamento transversal relativo entre as seções resultantes do corte na seção  $S$ , provocado pela solicitação externa no caso (0) (no caso,  $\delta_{20}$  é nulo) [m].
- $\delta_{30} \rightarrow$  rotação relativa entre as seções resultantes do corte na seção  $S$ , provocada pela solicitação externa no caso (0) [rad].

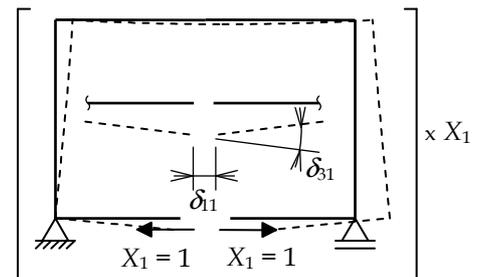


**Item (c)**

Caso (1) - Hiperestático  $X_1$  isolado no SP

Interpretações físicas dos coeficientes de flexibilidade:

- $\delta_{11} \rightarrow$  deslocamento axial relativo entre as seções resultantes do corte na seção  $S$ , provocado por  $X_1 = 1$  no caso (1) [m/kN].
- $\delta_{21} \rightarrow$  deslocamento transversal relativo entre as seções resultantes do corte na seção  $S$ , provocado por  $X_1 = 1$  no caso (1) (no exemplo,  $\delta_{21}$  é nulo) [m/kN].
- $\delta_{31} \rightarrow$  rotação relativa entre as seções resultantes do corte na seção  $S$ , provocada por  $X_1 = 1$  no caso (1) [rad/kN].

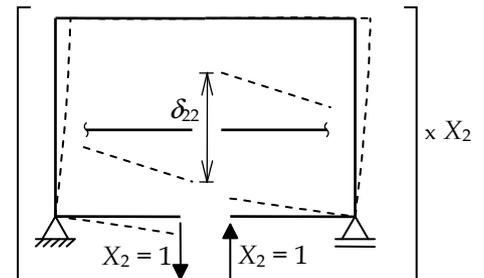


(essa figura não foi solicitada)

Caso (2) - Hiperestático  $X_2$  isolado no SP

Interpretações físicas dos coeficientes de flexibilidade:

- $\delta_{12} \rightarrow$  deslocamento axial relativo entre as seções resultantes do corte na seção  $S$ , provocado por  $X_2 = 1$  no caso (2) (no exemplo,  $\delta_{12}$  é nulo) [m/kN].
- $\delta_{22} \rightarrow$  deslocamento transversal relativo entre as seções resultantes do corte na seção  $S$ , provocado por  $X_2 = 1$  no caso (2) [m/kN].
- $\delta_{32} \rightarrow$  rotação relativa entre as seções resultantes do corte na seção  $S$ , provocada por  $X_2 = 1$  no caso (2) (no exemplo,  $\delta_{32}$  é nulo) [rad/kN].

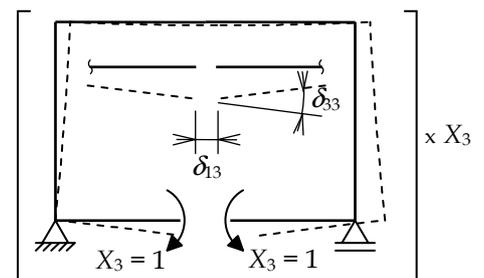


(essa figura não foi solicitada)

Caso (3) - Hiperestático  $X_3$  isolado no SP

Interpretações físicas dos coeficientes de flexibilidade:

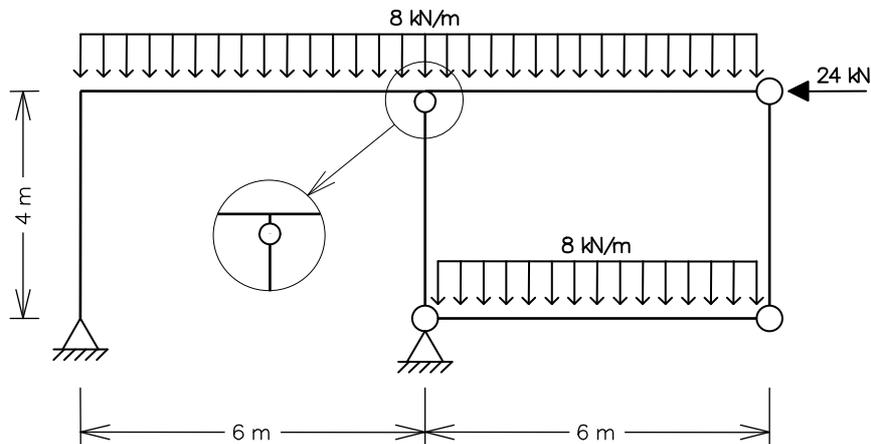
- $\delta_{13} \rightarrow$  deslocamento axial relativo entre as seções resultantes do corte na seção  $S$ , provocado por  $X_3 = 1$  no caso (3) [m/kNm].
- $\delta_{23} \rightarrow$  deslocamento transversal relativo entre as seções resultantes do corte na seção  $S$ , provocado por  $X_3 = 1$  no caso (3) (no exemplo,  $\delta_{23}$  é nulo) [m/kNm].
- $\delta_{33} \rightarrow$  rotação relativa entre as seções resultantes do corte na seção  $S$ , provocada por  $X_3 = 1$  no caso (3) [rad/kNm].



(essa figura não foi solicitada)

3ª Questão (2,0 pontos)

Determine o diagrama de momentos fletores para o pórtico plano abaixo.



**Convenção para traçado do diagrama de momentos fletores**

As ordenadas do diagrama de momentos fletores são desenhadas do lado da fibra tracionada da seção transversal. Não é necessário indicar o sinal dos valores de momento fletor no diagrama.

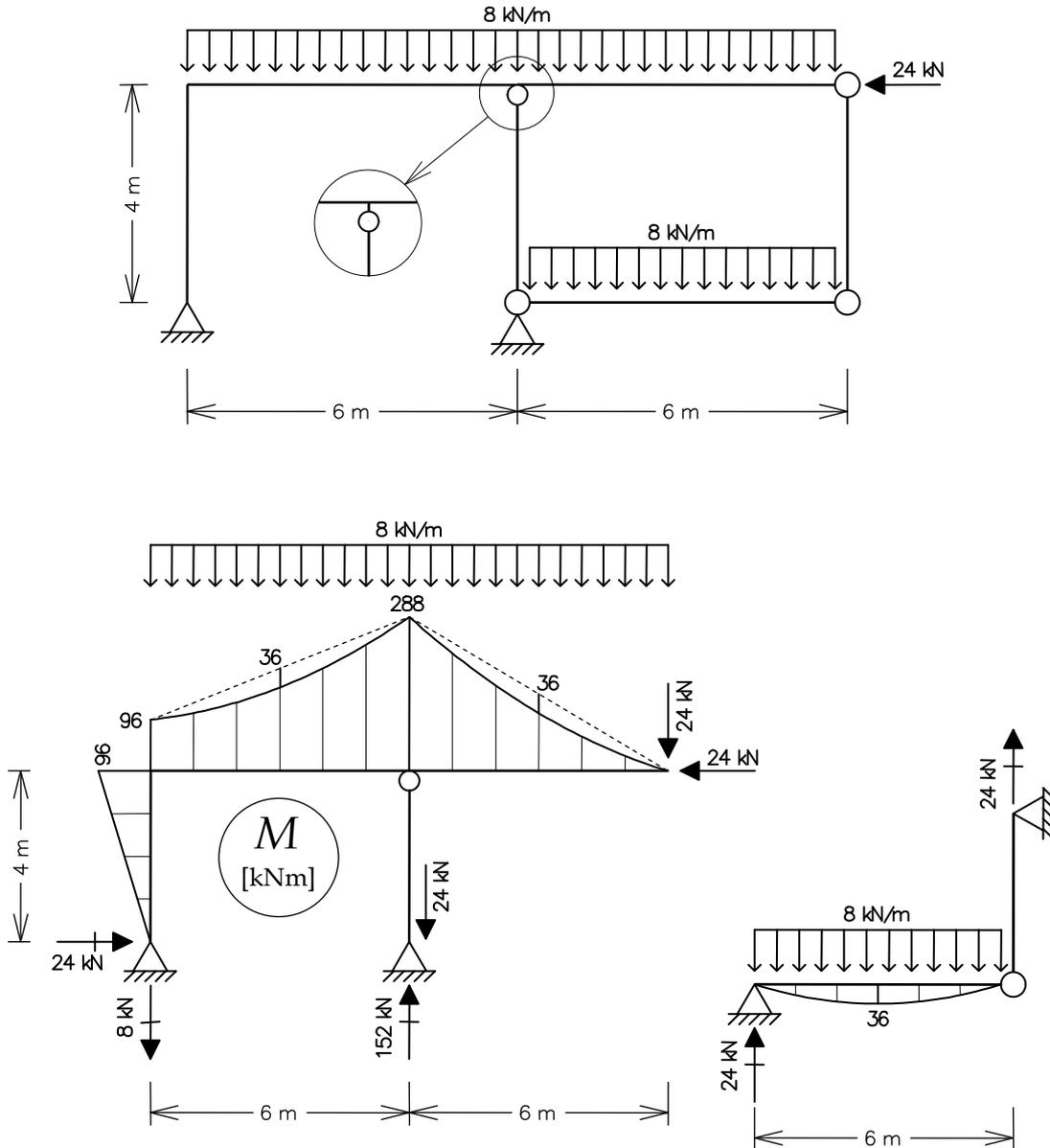
# SOLUÇÃO

ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2019

Grau G1 - 3ª Questão - Data: 28/08/2019 - Duração: 0:50 hs - Sem Consulta

3ª Questão (2,0 pontos)

Determine o diagrama de momentos fletores para o pórtico plano abaixo.



## Convenção para traçado do diagrama de momentos fletores

As ordenadas do diagrama de momentos fletores são desenhadas do lado da fibra tracionada da seção transversal. Não é necessário indicar o sinal dos valores de momento fletor no diagrama.

# ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2019

## Grau G1 - 4ª Questão - Data: 04/09/2019 - Duração: 1:50 hs - Sem Consulta

4ª Questão (3,0 pontos)

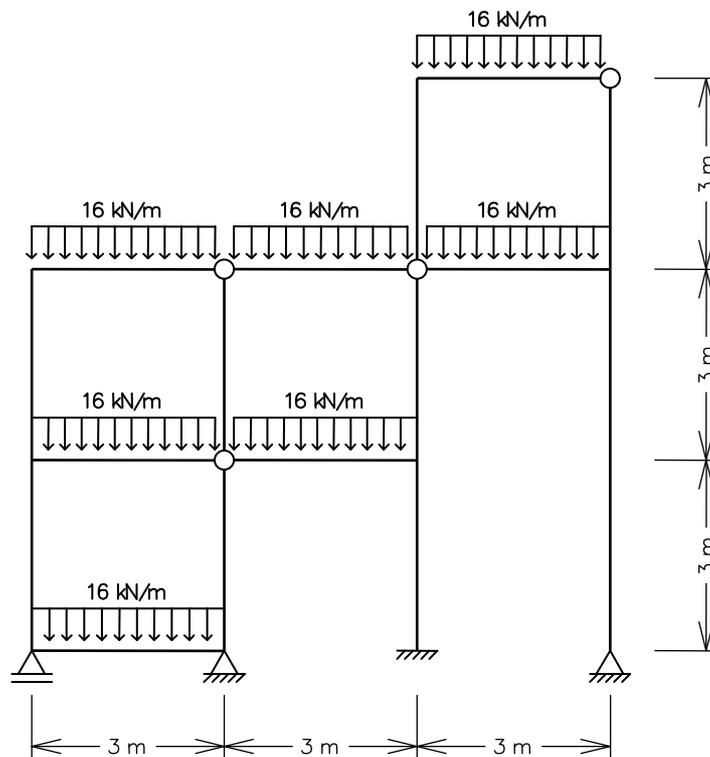
Item (a) (2,0 pontos)

Indique um possível Sistema Principal para a solução do pórtico mostrado na figura abaixo pelo Método das Forças. Os hiperestáticos também devem ser indicados.

**Obrigatoriamente o Sistema Principal deve ser criado eliminando apenas vínculos de continuidade interna de rotação ou vínculos externos de impedimento à rotação.**

Mostre a decomposição do Sistema Principal obtido em uma sequência de carregamento de pórticos isostáticos simples (biapoiados, triarticulados, e engastados com balanço).

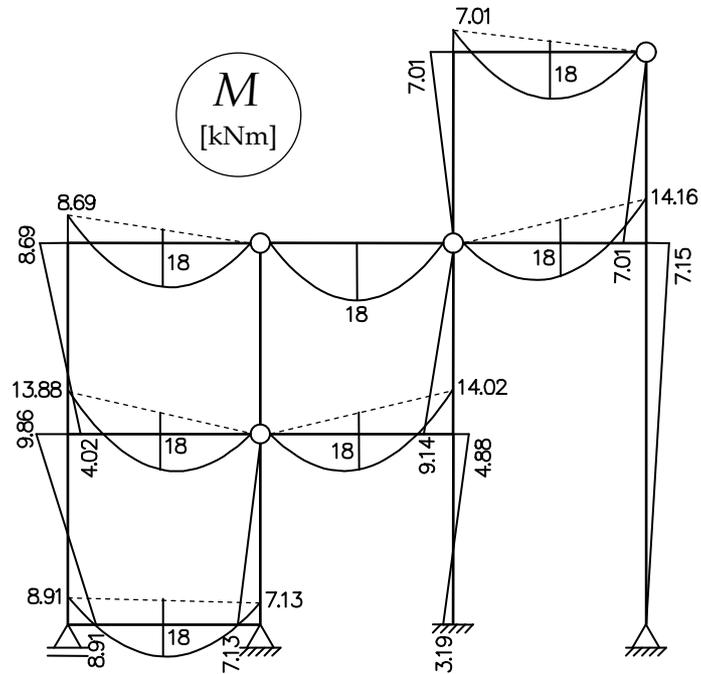
A solução pelo Método das Forças despreza deformações por cisalhamento. Todas as barras têm as mesmas propriedades de material, com módulo de elasticidade  $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ , e de seção transversal, com área da seção transversal  $A = 0.001 \text{ m}^2$  e momento de inércia  $I = 0.0001 \text{ m}^4$ .



**Item (b)** (1,0 ponto)

O diagrama de momentos fletores do pórtico do item (a) está mostrado abaixo. A convenção para traçado do diagrama de momentos fletores é tal que as ordenadas do diagrama de momentos fletores são desenhadas do lado da fibra tracionada da seção transversal.

**Pedem-se os valores dos hiperestáticos do item (a) com sinal.** As unidades dos hiperestáticos também devem ser indicadas.

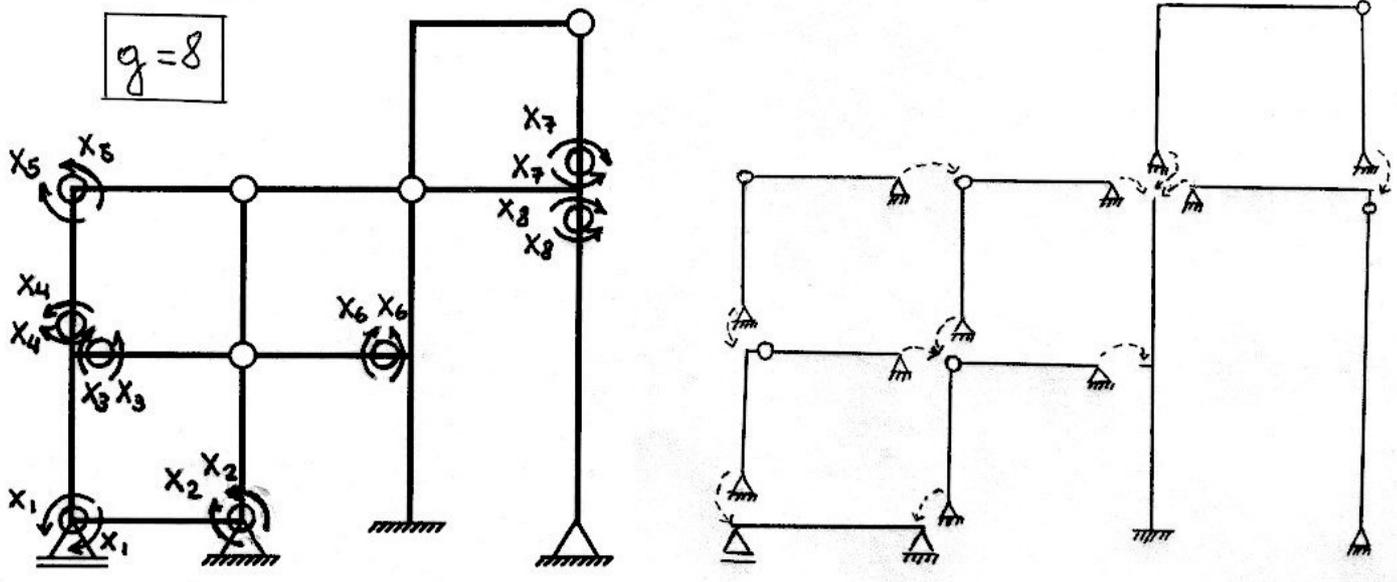


SOLUÇÃO  
**ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2019**

**Grau G1 - 4ª Questão - Data: 04/09/2019 - Duração: 1:50 hs - Sem Consulta**

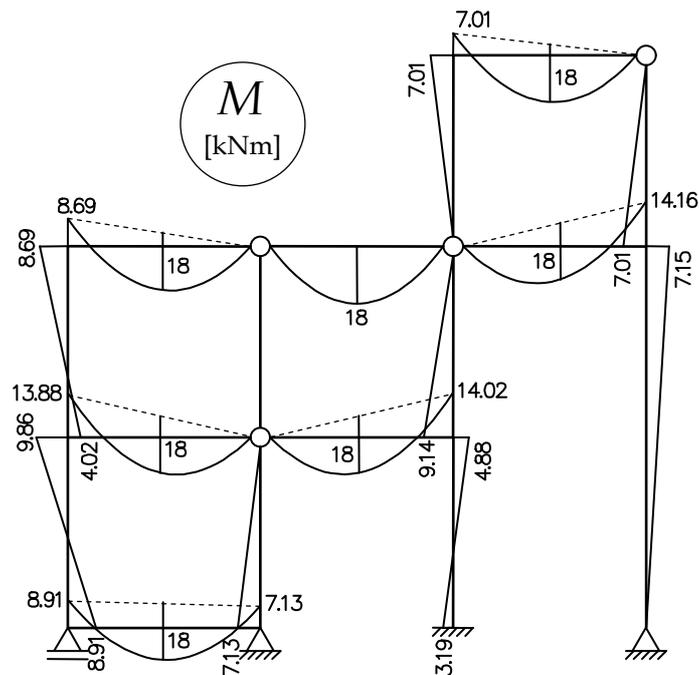
4ª Questão (3,0 pontos)

Item (a) (2,0 pontos)



Item (b) (1,0 ponto)

$X_1 = -8.91$  kNm;  $X_2 = +7.13$  kNm;  $X_3 = +13.88$  kNm;  $X_4 = -4.02$  kNm;  
 $X_5 = +8.69$  kNm;  $X_6 = +14.02$  kNm;  $X_7 = -7.01$  kNm;  $X_8 = +7.15$  kNm



# ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2019

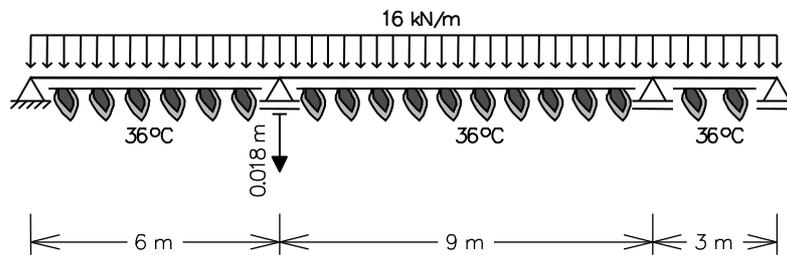
## Grau G1 - 5ª Questão - Data: 11/09/2019 - Duração: 1:50 hs - Sem Consulta

### 5ª Questão (3,0 pontos)

Considere a viga contínua mostrada abaixo. O material tem módulo de elasticidade  $E = 10^7 \text{ kN/m}^2$  e coeficiente de dilatação térmica  $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ . A viga tem uma seção transversal constante, com momento de inércia  $I = 0.0036 \text{ m}^4$ , altura  $h = 0.60 \text{ m}$  e centro de gravidade no meio de altura. As seguintes solicitações atuam no pórtico concomitantemente:

- Carregamento com força uniformemente distribuída  $q = 16 \text{ kN/m}$  atuando em todos os vãos da viga.
- Aquecimento de  $\Delta T_i = +36 \text{ }^\circ\text{C}$  na face inferior da viga.
- Recalque vertical, para baixo, de  $1.8 \times 10^{-2} \text{ m}$  ( $\rho = -0.018 \text{ m}$ ) do segundo apoio da viga (da esquerda para a direita).

**Pede-se o diagrama de momentos fletores finais.** Considere apenas deformações por flexão, isto é, são desprezadas deformações axiais e por cisalhamento.



Sabe-se:

Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{bf - de}{ad - bc} \\ X_2 = \frac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

- (i) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é

$$du^T = \alpha \Delta T_{CG} dx$$

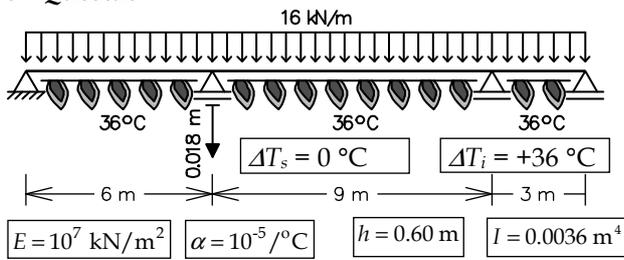
sendo  $\Delta T_{CG}$  a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

- (ii) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é

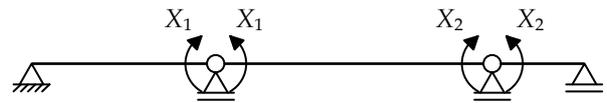
$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$

sendo  $\Delta T_i$  a variação de temperatura das fibras inferiores da viga e  $\Delta T_s$  a variação de temperatura das fibras superiores.

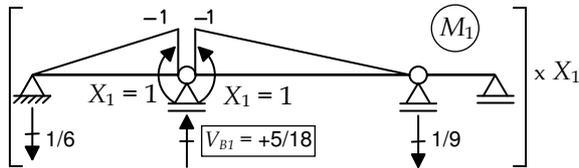
5ª Questão



Sistema Principal e Hiperestáticos ( $g = 2$ )



Caso (1) - Hiperestático  $X_1$  isolado no SP



$$\delta_{11} = \int_{\text{viga}} \frac{M_1^2}{EI} dx \quad \delta_{21} = \int_{\text{viga}} \frac{M_2 M_1}{EI} dx$$

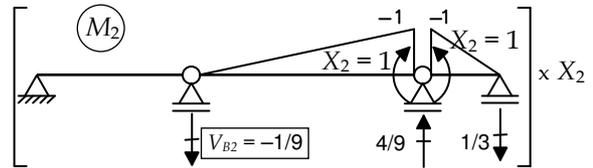
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[ +\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 9 \right]$$

$$\delta_{11} = +\frac{125}{9} \times 10^{-5} \text{ rad/kNm}$$

$$\delta_{21} = \frac{1}{EI} \left[ +\frac{1}{6} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 9 \right]$$

$$\delta_{21} = +\frac{12.5}{3} \times 10^{-5} \text{ rad/kNm}$$

Caso (2) - Hiperestático  $X_2$  isolado no SP



$$\delta_{12} = \int_{\text{viga}} \frac{M_1 M_2}{EI} dx \quad \delta_{22} = \int_{\text{viga}} \frac{M_2^2}{EI} dx$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \left[ +\frac{1}{6} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 9 \right]$$

$$\delta_{12} = +\frac{12.5}{3} \times 10^{-5} \text{ rad/kNm}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[ +\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 3 \right]$$

$$\delta_{22} = +\frac{100}{9} \times 10^{-5} \text{ rad/kNm}$$

Caso (0) - Solicitações externas isoladas no SP

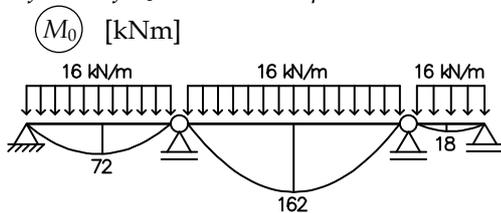
O termo de carga  $\delta_{10}$  é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula introduzida na criação do Sistema Principal associada a  $X_1$  provocada pela força uniformemente distribuída aplicada na viga, pela variação de temperatura na viga e pelo recalque vertical no segundo apoio, no caso (0):

$$\delta_{10} = \delta_{10}^q + \delta_{10}^T + \delta_{10}^p$$

O termo de carga  $\delta_{20}$  é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula introduzida na criação do Sistema Principal associada a  $X_2$  provocada pela força uniformemente distribuída aplicada na viga, pela variação de temperatura na viga e pelo recalque vertical no segundo apoio, no caso (0):

$$\delta_{20} = \delta_{20}^q + \delta_{20}^T + \delta_{20}^p$$

Efeito da força distribuída aplicada



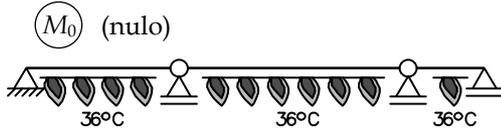
$$\delta_{10}^q = \int_{\text{viga}} \frac{M_1 M_0}{EI} dx$$

$$\delta_{10}^q = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (+72) \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (+162) \cdot 9 \right] \quad \delta_{10}^q = -1750 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{20}^q = \int_{\text{viga}} \frac{M_2 M_0}{EI} dx$$

$$\delta_{20}^q = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (+162) \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (+18) \cdot 3 \right] \quad \delta_{20}^q = -1400 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

Efeito da variação de temperatura



$$d\theta_0^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (+36 - 0)}{0.60} dx \Rightarrow \boxed{d\theta_0^T = +\alpha \cdot 60 \cdot dx}$$

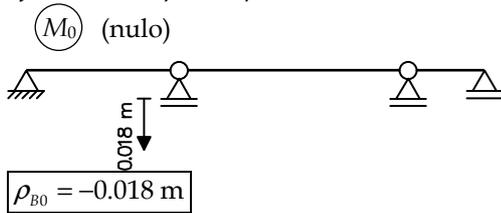
$$\delta_{10}^T = \int_{\text{viga}} M_1 d\theta_0^T$$

$$\delta_{10}^T = +\alpha \cdot 60 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 6 \right] + \alpha \cdot 60 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 9 \right] \Rightarrow \boxed{\delta_{10}^T = -450 \times 10^{-5} \text{ rad}}$$

$$\delta_{20}^T = \int_{\text{viga}} M_2 d\theta_0^T$$

$$\delta_{20}^T = +\alpha \cdot 60 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 9 \right] + \alpha \cdot 60 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 3 \right] \Rightarrow \boxed{\delta_{20}^T = -360 \times 10^{-5} \text{ rad}}$$

Efeito do recalque de apoio



$$\boxed{\rho_{B0} = -0.018 \text{ m}}$$

$$1 \cdot \delta_{10}^{\rho} + V_{B1} \cdot \rho_{B0} = 0 \Rightarrow \delta_{10}^{\rho} = -V_{B1} \cdot \rho_{B0}$$

$$\delta_{10}^{\rho} = -\left[ (5/18) \cdot (-0.018) \right] \Rightarrow \boxed{\delta_{10}^{\rho} = +500 \times 10^{-5} \text{ rad}}$$

$$1 \cdot \delta_{20}^{\rho} + V_{B2} \cdot \rho_{B0} = 0 \Rightarrow \delta_{20}^{\rho} = -V_{B2} \cdot \rho_{B0}$$

$$\delta_{20}^{\rho} = -\left[ (-1/9) \cdot (-0.018) \right] \Rightarrow \boxed{\delta_{20}^{\rho} = -200 \times 10^{-5} \text{ rad}}$$

Equações de compatibilidade

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\delta_{10} = \delta_{10}^q + \delta_{10}^T + \delta_{10}^{\rho}}$$

$$\boxed{\delta_{10} = -1700 \times 10^{-5} \text{ rad}}$$

$$\boxed{\delta_{20} = \delta_{20}^q + \delta_{20}^T + \delta_{20}^{\rho}}$$

$$\boxed{\delta_{20} = -1960 \times 10^{-5} \text{ rad}}$$

$$\Rightarrow 10^{-5} \begin{Bmatrix} -1700 \\ -1960 \end{Bmatrix} + 10^{-5} \begin{bmatrix} +125/9 & +12.5/3 \\ +12.5/3 & +100/9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} X_1 = +78.3 \text{ kNm} \\ X_2 = +147.0 \text{ kNm} \end{cases}$$

Momentos Fletores Finais:

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$

