

ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2021

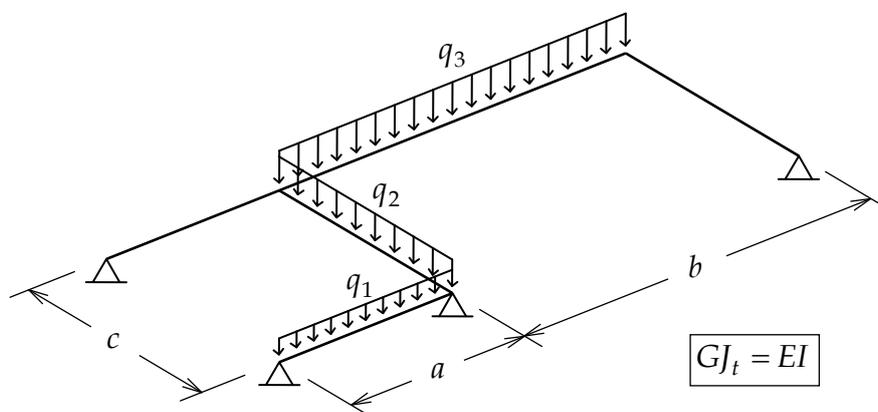
Grau G2 - 1ª Questão - Aplicação: 13/09/2021, 14 hs - Entrega: 20/09/2021, 9 hs

1ª Questão (2,5 pontos)

Empregando-se o Método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores e de momentos de torção para a grelha abaixo. Todos os passos da solução têm de ser indicados. Isto é, mostre:

1. Cálculo dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade.
2. Sistema de equações de compatibilidade.
3. Valores dos hiperestáticos obtidos da solução deste sistema.
4. Superposição para obtenção dos diagramas finais.

Todas as barras têm a relação indicada entre a rigidez à flexão EI e a rigidez à torção GJ_t , em que E é módulo de elasticidade do material, G é o módulo de cisalhamento do material, I é o momento de inércia à flexão da seção transversal e J_t é o momento de inércia à torção da seção transversal.



Consulte pelo seu número de matrícula os dados do seu modelo na tabela fornecida.

Matrícula	a [m]	b [m]	c [m]	q_1 [kN/m]	q_2 [kN/m]	q_3 [kN/m]
1512657	3	3	6	6	10	10
1520955	4	4	5	8	8	8
1611270	5	5	4	10	6	6
1620733	6	6	3	12	4	4
1621571	3	4	5	8	10	8
1621636	4	5	4	10	8	6
1711383	5	6	3	12	6	4
1720486	6	3	6	6	4	10
1721620	3	5	4	10	10	6
1721622	4	6	3	12	8	4
1811612	5	3	6	6	6	10
1812132	6	4	5	8	4	8
1910673	3	6	3	12	10	4
1911243	4	3	6	6	8	10

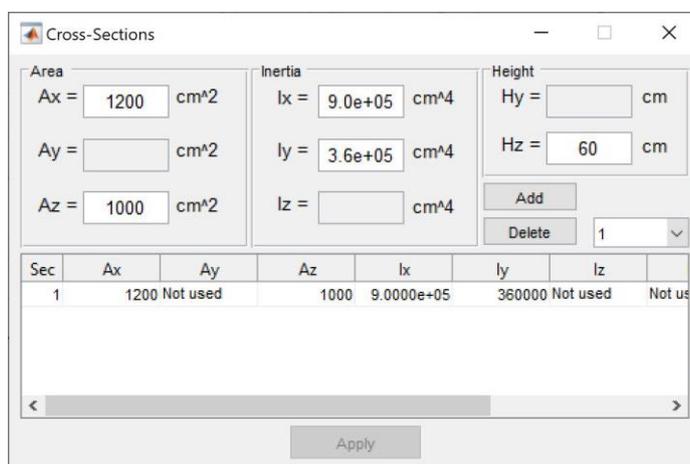
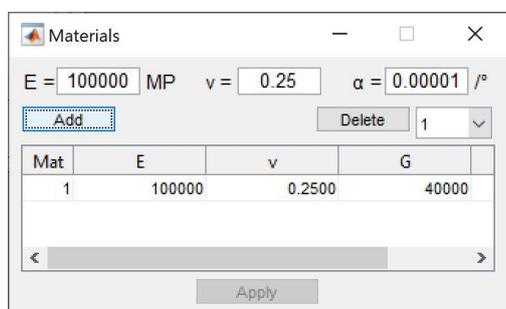
O relatório da tarefa deve ser entregue na página da disciplina no Moodle/CCEAD em um arquivo em formato PDF com o seguinte nome: **ENG1204-212-G2-Q1-matricula.pdf**, em que **matricula** é o número de matrícula da aluna ou do aluno.

Além do relatório, deverá ser entregue um vídeo gravado, com imagem e áudio do próprio aluno, com uma explicação sucinta sobre a solução adotada. O arquivo do vídeo deve ter o seguinte nome **ENG1204-212-G2-Q1-matricula.EXT**, em que **EXT** é a extensão do nome do arquivo de acordo com o formato do vídeo.

Não serão aceitas respostas após 9 hs do dia 20/09/2021.

Sugere-se o uso do programa LESM (para análise de pórticos e treliças planas, grelhas, e pórticos e treliças espaciais): <http://www.tecgraf.puc-rio.br/lesm>.

Os seguintes parâmetros de material e de seção transversal devem ser utilizados no LESM para obter a relação $GJ_t = EI$:



O valor do módulo de cisalhamento G do material é calculado automaticamente pelo LESM através da expressão:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

em que ν é o coeficiente de Poisson do material.

ENG1024 - Análise de Estruturas II

Grau 2 - Questão 1

1 Apresentação do problema

O problema a ser resolvido consiste em uma grelha hiperestática ilustrada na Figura 1. Uma grelha é definida como uma estrutura plana com somente carregamentos ortogonais a esse plano e, devido à isso, ela mobiliza esforços internos de flexão (momento fletor), torção (momento torsor) e cisalhamento (esforço cortante). O problema será resolvido de forma literal em função das variáveis ($q_1, q_2, q_3, a, b, c, E, I, G$ e J_t) especificando o passo a passo do método das forças. Para calcular os coeficientes de flexibilidade e termos de carga serão consideradas as energias de deformação devido à flexão e à torção. A deformada da estrutura hiperestática é ilustrada na Figura 2. A referência para esse documento é [1].

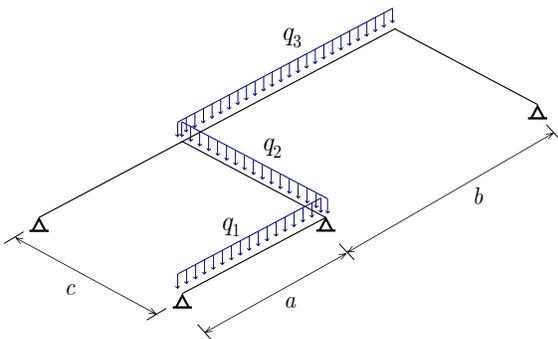


Figura 1: Grelha hiperestática.

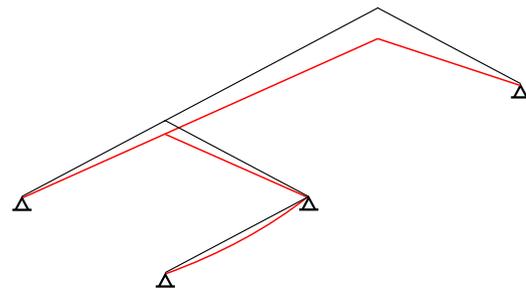


Figura 2: Grelha hiperestática - configuração deformada.

2 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade

O primeiro passo para a solução de um problema estrutural hiperestático pelo método das forças é identificar o seu grau de hiperestaticidade e, após isso, definir um sistema principal isostático. Em estruturas do tipo grelha, a exemplo do que acontece com pórticos planos, estão disponíveis três equações de equilíbrio, sendo elas o somatório das cargas verticais nulas ($\sum F_z = 0$) e dos momentos em torno dos dois eixos do plano da grelha também nulos ($\sum M_x = 0, \sum M_y = 0$). Como é possível observar na Figura 1, a grelha apresenta quatro incógnitas de reações de apoio (os apoios de uma grelha funcionam como apoios de primeiro gênero por não haver cargas atuantes no

mesmo plano da estrutura e portanto não aparecerem reações horizontais). Sendo assim, pode-se dizer que seu grau de hiperestaticidade é igual a 1 ($g = 1$) e o sistema principal é obtido por meio da remoção de um apoio. O caso 0 é ilustrado na Figura 3 e o caso 1 na Figura 4.

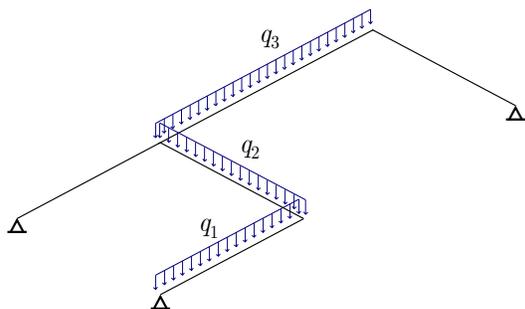


Figura 3: Caso 0 - Sistema principal com carregamento externo.

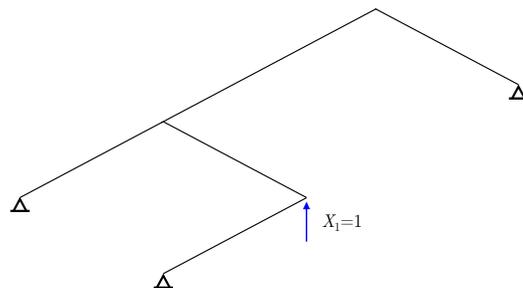


Figura 4: Caso 1 - Sistema principal com hiperestático unitário.

Como se trata de uma estrutura com apenas um grau de hiperestaticidade, é necessária apenas uma equação de compatibilidade de deslocamentos e deformações para reestabelecer as condições da estrutura hiperestática original. Com isso, apenas é necessária a determinação de um termo de carga (δ_{10}) e um coeficiente de flexibilidade (δ_{11}) e esses serão os deslocamentos na direção do hiperestático X_1 (Figura 4) no caso 0 e caso 1, respectivamente. As Figuras 5 e 6 ilustram as configurações deformadas dos casos 0 e 1 e explicitam δ_{10} e δ_{11} .

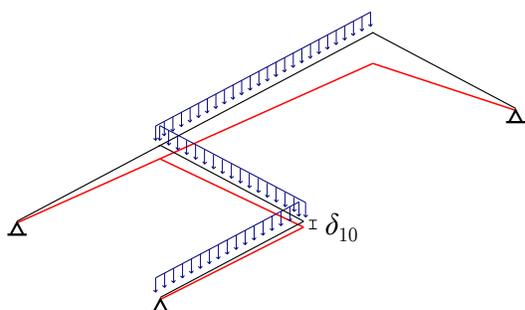


Figura 5: Caso 0 - Configuração deformada e termo de carga δ_{10} .

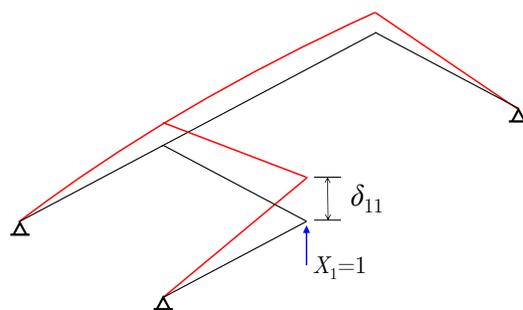


Figura 6: Caso 1 - Configuração deformada e coeficiente de flexibilidade δ_{11} .

Para a determinação dos termos de carga é necessário determinar os diagramas de momentos fletores e torsores dos dois casos em questão. Para isso, primeiramente tem-se que determinar as reações de apoio. As Figuras 7 e 8 ilustram as reações de apoio para os casos 0 e 1, respectivamente. É possível notar que foram definidos eixos na grelha, isso é para facilitar a aplicação das equações de equilíbrio de momento, que devem ser nulos em torno de eixos e não de pontos. As reações de apoio para o caso 0 são designadas V_{0A} , V_{0B} e V_{0C} e para o caso 1 V_{1A} , V_{1B} e V_{1C} .

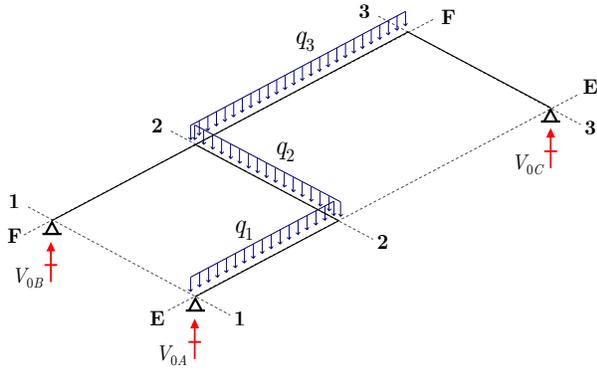


Figura 7: Caso 0 - Reações de apoio.

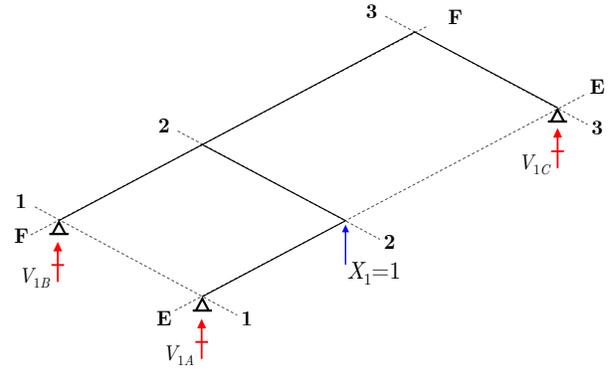


Figura 8: Caso 1 - Reações de apoio.

A reação V_{0B} é obtida diretamente aplicando momento em torno do eixo E-E igual a zero ($\sum M_{EE} = 0$), feito isso a reação V_{0C} é definida fazendo o momento em torno do eixo 1-1 nulo ($\sum M_1 = 0$) e, finalmente, obtém-se a a reação V_{0A} com o equilíbrio das forças verticais ($\sum F_z = 0$). As reações são dadas pelas Equações 1, 2 e 3.

$$\sum M_{EE} = 0 \implies V_{0B} = bq_3 + \frac{cq_2}{2} \quad (1)$$

$$\sum M_1 = 0 \implies V_{0C} = \frac{\frac{a^2q_1}{2} + acq_2 + bq_3 \left(a + \frac{b}{2}\right)}{a + b} \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 \implies V_{0A} = aq_1 - \frac{\frac{a^2q_1}{2} + acq_2 + bq_3 \left(a + \frac{b}{2}\right)}{a + b} + \frac{cq_2}{2} \quad (3)$$

No caso 1 as reações são determinadas de forma mais trivial, com o somatório de momentos em torno de E-E determina-se que $V_{1B} = 0$, V_{1C} e V_{1A} também são determinados com $\sum M_1 = 0$ e $\sum M_3 = 0$, respectivamente (Equações 4 e 5).

$$\sum M_1 = 0 \implies V_{1C} = -\frac{a}{a + b} \quad (4)$$

$$\sum M_3 = 0 \implies V_{1A} = -\frac{b}{a + b} \quad (5)$$

Com isso, a determinação do diagrama de momentos fletores e torsões se torna trivial por se tratar de uma estrutura isostática com as reações de apoio já determinadas. Por conveniência, as barras da grelha serão numeradas conforme a Figura 9. Também é importante definir um eixo local x_i para cada barra i (Figura 10). Isso é para definir uma equação de momento para cada barra, com o intuito de realizar a integração para determinação do termo de carga e do coeficiente de flexibilidade.

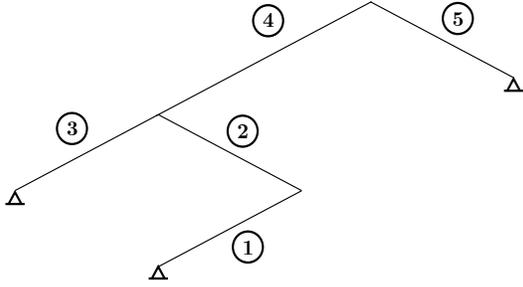


Figura 9: Numeração das barras.

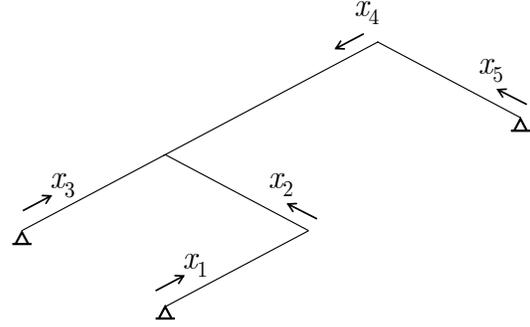


Figura 10: Eixos locais das barras.

As funções que descrevem a distribuição de momentos fletores e torsores ao longo da barra i para o caso j são designadas $M_{ji}(x)$ e $T_{ij}(x)$, respectivamente. Os valores dos momentos fletores na extremidade inicial e final da barra i no caso j são designados M_{jiA} e M_{jiB} , respectivamente. O diagrama de momento fletor do caso 0 é ilustrado na Figura 11. As Equações de 6 a 10 descrevem o momento fletor nas barras e as Equações de 11 a 20 os valores dos momentos fletores nas extremidades inicial e final. Todas as expressões levam em consideração os eixos locais definidos na Figura 10.

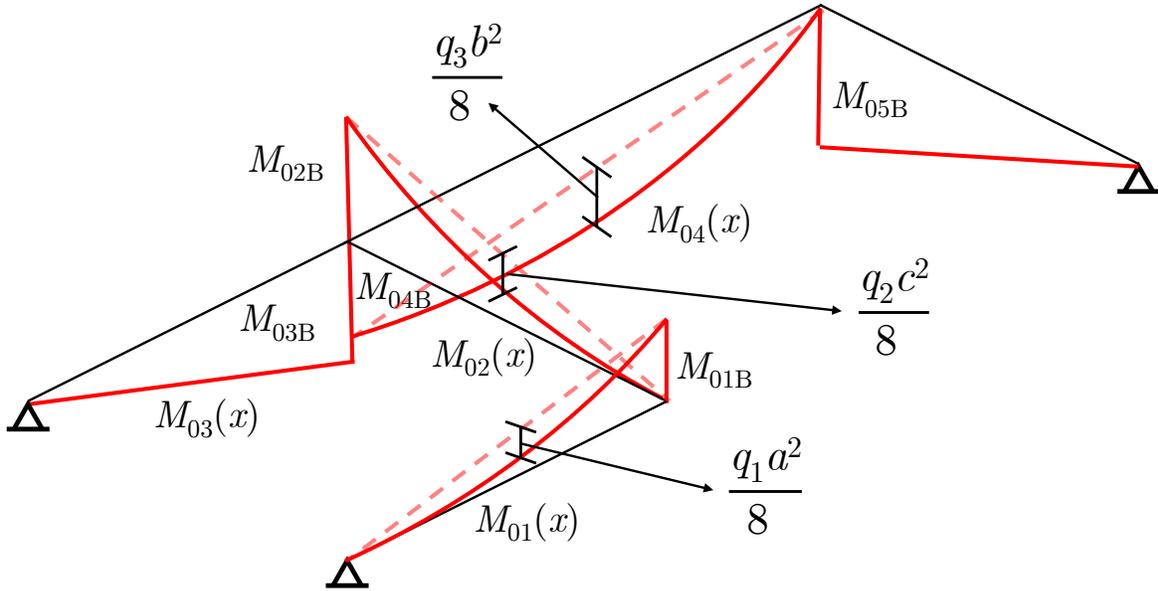


Figura 11: Caso (0) - Diagrama de momento fletor.

$$M_{01}(x) = x \left(aq_1 - \frac{\frac{a^2q_1}{2} + acq_2 + bq_3 \left(a + \frac{b}{2} \right) + \frac{cq_2}{2}}{a+b} \right) - \frac{q_1x^2}{2} \quad (6)$$

$$M_{02}(x) = \frac{x (a^2q_1 + b^2q_3 + 2abq_3 + acq_2 - bcq_2 + aq_2x + bq_2x)}{2(a+b)} \quad (7)$$

$$M_{03}(x) = x \left(bq_3 + \frac{cq_2}{2} \right) \quad (8)$$

$$M_{04}(x) = \frac{x \left[\frac{a^2q_1}{2} + acq_2 + bq_3 \left(a + \frac{b}{2} \right) \right]}{a+b} - \frac{q_3x^2}{2} \quad (9)$$

$$M_{05}(x) = \frac{x \left[\frac{a^2q_1}{2} + acq_2 + bq_3 \left(a + \frac{b}{2} \right) \right]}{a+b} \quad (10)$$

$$M_{01A} = 0 \quad (11)$$

$$M_{01B} = -\frac{a (b^2q_3 - abq_1 + 2abq_3 + acq_2 - bcq_2)}{2(a+b)} \quad (12)$$

$$M_{02A} = 0 \quad (13)$$

$$M_{02B} = -\frac{c (q_1a^2 + 2q_3ab + 2q_2ac + q_3b^2)}{2(a+b)} \quad (14)$$

$$M_{03A} = 0 \quad (15)$$

$$M_{03B} = a \left(bq_3 + \frac{cq_2}{2} \right) \quad (16)$$

$$M_{04A} = 0 \quad (17)$$

$$M_{04B} = \frac{ab (aq_1 + bq_3 + 2cq_2)}{2(a+b)} \quad (18)$$

$$M_{05A} = 0 \quad (19)$$

$$M_{05B} = \frac{c \left[\frac{a^2q_1}{2} + acq_2 + bq_3 \left(a + \frac{b}{2} \right) \right]}{a+b} \quad (20)$$

Para o caso 1, o diagrama de momento fletor é ilustrado na Figura 12. As expressões que definem os momentos nas barras estão descritas nas Equações de 21 a 25 e os valores dos momentos nas extremidades nas Equações de 26 a 35.

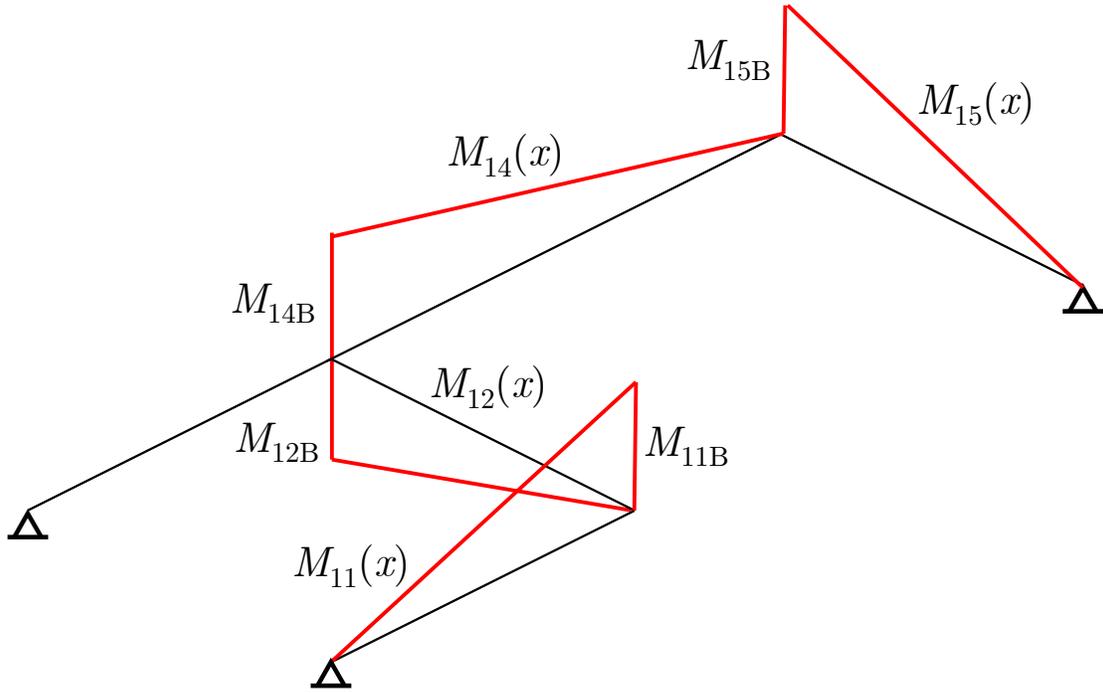


Figura 12: Caso (1) - Diagrama de momento fletor.

$$M_{11}(x) = -\frac{bx}{a+b} \quad (21)$$

$$M_{12}(x) = \frac{ax}{a+b} \quad (22)$$

$$M_{13}(x) = 0 \quad (23)$$

$$M_{14}(x) = -\frac{ax}{a+b} \quad (24)$$

$$M_{15}(x) = -\frac{ax}{a+b} \quad (25)$$

$$M_{11A} = 0 \quad (26)$$

$$M_{11B} = -\frac{ab}{a+b} \quad (27)$$

$$M_{12A} = 0 \quad (28)$$

$$M_{12B} = \frac{ac}{a+b} \quad (29)$$

$$M_{13A} = 0 \quad (30)$$

$$M_{13B} = 0 \quad (31)$$

$$M_{14A} = 0 \quad (32)$$

$$M_{14B} = -\frac{ab}{a+b} \quad (33)$$

$$M_{15A} = 0 \quad (34)$$

$$M_{15B} = -\frac{ac}{a+b} \quad (35)$$

Os momentos torsores são constantes nas barras e representam o valor do momento fletor na extremidade da barra adjacente, isso acontece nesse caso específico em que o ângulo entre as barras é de 90 graus. As barras 1, 3 e 5 não são solicitadas à torção em nenhum dos dois casos, as Figuras 13 e 14 mostram os valores dos momentos torsores para as barras 2 e 3 nos casos 0 e 1, respectivamente.

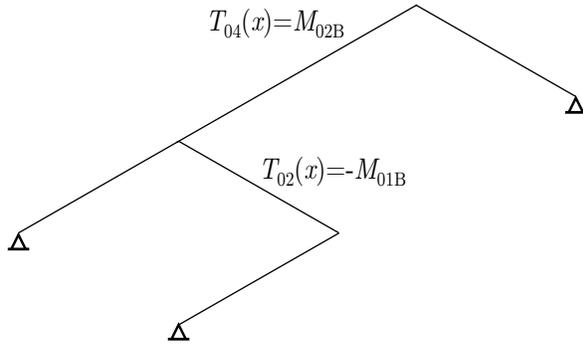


Figura 13: Caso 0 - Diagrama de momento torsor.

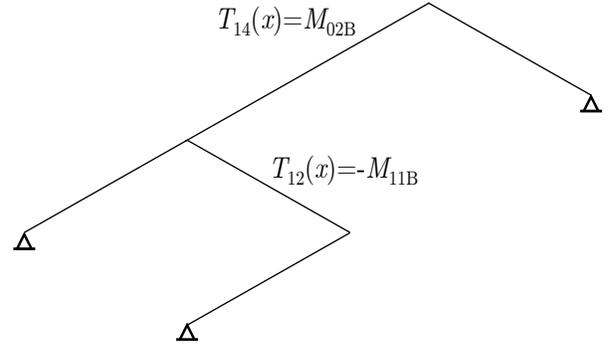


Figura 14: Caso 1 - Diagrama de momento torsor.

De posse das expressões dos momentos fletores e torsores para ambos os casos, é possível determinar o termo de carga e o coeficiente de flexibilidade e, após isso, calcular o valor do hiperestático X_1 . A Equação 36 é a expressão que restitui a condição de deslocamento nulo no ponto onde foi removido o apoio para geração do sistema principal.

$$\delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0 \quad (36)$$

O termo de carga e o coeficiente de flexibilidade são calculados pelo princípio das forças virtuais (Equação 37). Onde M_i e T_i são os momentos fletor e torsor devido ao hiperestático X_i . M_j e T_j os momentos devido ao hiperestático j . Para os termos de carga, como $j = 0$, M_0 e T_0 são os momentos devido ao carregamento externo no sistema principal. O módulo de elasticidade longitudinal do material é designado E , o módulo de elasticidade transversal ou módulo de cisalhamento é designado G , o momento de inércia da seção em torno do eixo perpendicular ao eixo da barra e pertencente ao plano da estrutura é designado I e o momento de inércia à torção é designado J_t .

$$\delta_{ij} = \int_{estrutura} \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int_{estrutura} \frac{T_i T_j}{GJ_t} dx \quad (37)$$

Como hipótese do exercício, $EI = GJ_t$, a Equação 37 se torna a Equação 38.

$$\delta_{ij} = \int_{estrutura} \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int_{estrutura} \frac{T_i T_j}{EI} dx \quad (38)$$

Como a estrutura é formada de barras discretas, a integral que determina os coeficientes de flexibilidade ou termos de cargas pode ser expressa como um somatório de integrais ao longo de cada barra (Equação 39).

$$\delta_{ij} = \sum_{n=1}^{nbarras} \left[\int_{barra} \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int_{barra} \frac{T_i T_j}{EI} dx \right] \quad (39)$$

Por conveniência será dividido o termo de carga devido aos momentos fletores δ_{10M} e aos momentos torsores δ_{10T} , sendo que $\delta_{10} = \delta_{10M} + \delta_{10T}$. As Equações 40, 41 e 42 demonstram as expressões para o cálculo do termo de carga e as Equações 43, 43 e 43 para o cálculo do coeficiente de flexibilidade.

$$\delta_{10M} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a M_{11}M_{01}dx + \int_0^c M_{12}M_{02}dx + \int_0^b M_{14}M_{04}dx + \int_0^c M_{15}M_{05}dx \right] \quad (40)$$

$$\delta_{10T} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^c T_{12}T_{02}dx + \int_0^b T_{14}T_{04}dx \right] \quad (41)$$

$$\delta_{10} = \delta_{10M} + \delta_{10T} \quad (42)$$

$$\delta_{11M} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a M_{11}^2 dx + \int_0^c M_{12}^2 dx + \int_0^b M_{14}^2 dx + \int_0^c M_{15}^2 dx \right] \quad (43)$$

$$\delta_{11T} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^c T_{12}^2 dx + \int_0^b T_{14}^2 dx \right] \quad (44)$$

$$\delta_{11} = \delta_{11M} + \delta_{11T} \quad (45)$$

Com isso determina-se o termo de carga e o coeficiente de flexibilidade, o hiperestático é obtido diretamente pela Equação 46. As expressões simbólicas para essas entidades são muito grandes e não serão expressas nesse documento, porém um código em MATLAB[®] que vai em conjunto com essa solução possui todas as expressões calculadas.

$$X_1 = -\delta_{11}^{-1}\delta_{10} \quad (46)$$

Após a determinação dos hiperestáticos, basta fazer a superposição de efeitos do caso (0) e do caso (1) ponderado pelo hiperestático X_1 , para determinar os momentos fletores finais (Equação 47). De forma análoga, as reações de apoio finais são determinadas. Os momentos e reações também são resolvidos na rotina do MATLAB[®].

$$M(x) = M_0(x) + M_1(x)X_1 \quad (47)$$

3 Resultados

Os resultados do hiperestático X_1 , do termo de carga δ_{01} e do coeficiente de flexibilidade δ_{11} são fornecidos pela Tabela 1 para cada matrícula. As Figuras 15 e 15 ilustram o diagrama final de momentos fletores e torsões, respectivamente. É importante notar que os diagramas de momentos fletores são determinados através do momento fletor da extremidade final de cada barra (conforme convenção feita na Figura 10), apenas as barras 2 e 4 sofrem solicitação constante por momento torsor. Os valores para cada matrícula após a superposição de efeitos e reestabelecimento das condições de compatibilidade são fornecidos na Tabela 2.

Tabela 1: Valores do hiperestático, termo de carga e coeficiente de flexibilidade para cada matrícula.

Matrícula	a [m]	b [m]	c [m]	q_1 [kN/m]	q_2 [kN/m]	q_3 [kN/m]	X_1 [kN]	$\delta_{10}(10^{-2})$ [m]	$\delta_{11}(10^{-4})$ [m]
1512657	3	3	6	6	10	10	81,00	-1,822	2,250
1520955	4	4	5	8	8	8	56,49	-1,200	2,125
1611270	5	5	4	10	6	6	39,44	-0,838	2,125
1620733	6	6	3	12	4	4	37,25	-0,838	2,250
1621571	3	4	5	8	10	8	67,84	-1,041	1,534
1621636	4	5	4	10	8	6	45,36	-0,741	1,633
1711383	5	6	3	12	6	4	37,54	-0,672	1,791
1720486	6	3	6	6	4	10	46,69	-1,919	4,111
1721620	3	5	4	10	10	6	53,37	-0,603	1,130
1721622	4	6	3	12	8	4	39,17	-0,522	1,333
1811612	5	3	6	6	6	10	56,61	-2,027	3,581
1812132	6	4	5	8	4	8	39,72	-1,258	3,167
1910673	3	6	3	12	10	4	42,49	-0,377	0,888
1911243	4	3	6	6	8	10	67,92	-2,015	2,966

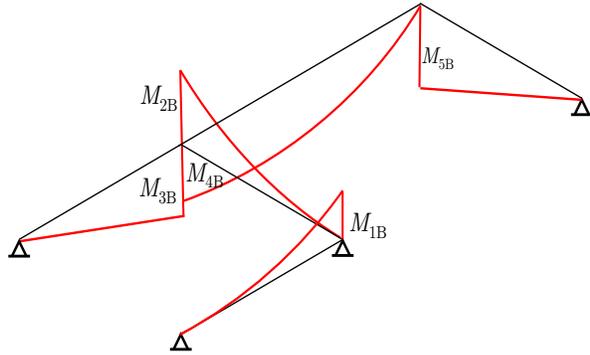


Figura 15: Diagrama de momento fletor.

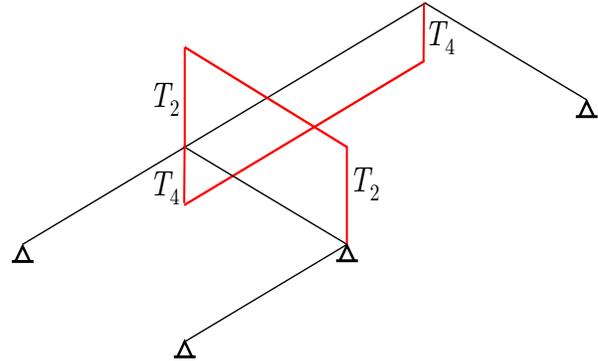


Figura 16: Diagrama de momento torsor.

Tabela 2: Valores dos momentos fletores nas extremidades de cada barra e valor constante dos torsos para as barras 2 e 4, todos em kNm.

Matrícula	M_{1B}	M_{2B}	M_{3B}	M_{4B}	M_{5B}	T_2	T_4
1512657	-175,50	-99,00	180,00	4,50	99,00	175,50	-99,00
1520955	-176,97	-118,78	208,00	31,03	118,78	176,97	-118,78
1611270	-148,61	-109,12	210,00	61,39	109,12	148,61	-109,12
1620733	-111,75	-70,12	180,00	68,25	70,12	111,75	-70,12
1621571	-153,57	-101,78	171,00	17,43	101,78	153,57	-101,78
1621636	-135,92	-98,46	184,00	48,08	98,46	135,92	-98,46
1711383	-103,74	-66,63	165,00	61,25	66,63	103,74	-66,63
1720486	-231,38	-131,23	252,00	20,61	131,23	231,38	-131,23
1721620	-118,82	-84,94	150,00	31,18	84,94	118,82	-84,94
1721622	-94,02	-60,99	144,00	49,98	60,99	94,02	-60,99
1811612	-222,39	-125,21	240,00	17,60	125,21	222,39	-125,21
1812132	-203,32	-140,84	252,00	48,68	140,84	203,32	-140,84
1910673	-81,98	-53,51	117,00	35,02	53,51	81,98	-53,51
1911243	-203,87	-114,26	216,00	12,13	114,26	203,87	-114,26

Referências

1 MARTHA, L. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2010.

ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2021

G2-Q2: Simulação computacional do Método dos Deslocamentos 2ª questão do grau G2 (1,0 ponto) - Data da entrega: 27/09/2021

Estude o exemplo de solução de um pórtico pelo Método dos Deslocamentos (http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp_pub/lfm/eng1204roteiroMD.pdf). Assista no site da disciplina no Ambiente de Aprendizagem Online da PUC-Rio (<https://ead.puc-rio.br/login/index.php>) o vídeo "Vídeo 18: Método dos Deslocamentos: Introdução". Utilizando o programa Ftool, siga os passos descritos nos itens abaixo e escreva um relatório. Este relatório deve conter as figuras que forem necessárias para descrever a simulação e seus valores numéricos.

Item (a) - Estrutura original a ser resolvida

Defina arbitrariamente, usando o programa Ftool, um quadro plano **com pelo menos quatro deslocabilidades**. Defina também as propriedades elásticas e geométricas das barras e as cargas que atuam no quadro. Adote todas as unidades em kN e m. Crie uma figura com a estrutura, suas dimensões e todas as propriedades e cargas utilizadas. Essa figura deve mostrar a configuração deformada da estrutura, com as componentes de deslocamentos e rotações (com valores e unidades) dos nós do modelo estrutural indicadas. Essas componentes de deslocamentos e rotações dos nós são as incógnitas do Método dos Deslocamentos, são chamadas de *deslocabilidades*, e devem ser identificadas pelo nome D_j , sendo j o número da deslocabilidade. Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe as deslocabilidades com seus nomes, valores e unidades à mão. Anote os valores das deslocabilidades (com sinal) para usar no item (f).

Item (b) - Sistema Hipergeométrico

Obtenha uma estrutura completamente indeslocável (todos os nós com deslocamentos e rotações impedidos) a partir da inserção de vínculos externos (apoios fictícios) na estrutura do item (a). Essa estrutura será o Sistema Hipergeométrico (SH) para a resolução da estrutura original pelo Método dos Deslocamentos. Mostre o SH em uma figura com os apoios fictícios numerados de acordo com a numeração das deslocabilidades.

Item (c) - Caso básico (0)

Para o Sistema Hipergeométrico do item (b), mantenha o carregamento do item (a). Isto corresponde ao caso (0) do Método dos Deslocamentos. Mostre a configuração deformada da estrutura juntamente com o carregamento aplicado, indicando as reações de apoio (com valores e unidades) que correspondem aos termos de carga β_{i0} . Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores (com sinal) e unidades dos termos de carga à mão.

Item (d) - Casos básicos que isolam as deslocabilidades

Retire as cargas utilizadas no item (c) e imponha ao Sistema Hipergeométrico, alternadamente, deslocamentos ou rotações prescritas com valores unitários nos nós onde os vínculos foram inseridos no item (b). Utilize a opção *Prescribed Displacements* do menu *Support Conditions* para impor um deslocamento prescrito. Isso deve gerar um caso de solicitação para cada deslocabilidade imposta independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos (j) do Método dos Deslocamentos, onde j é o número de uma deslocabilidade. Mostre a configuração deformada da estrutura para cada uma das deslocabilidades unitárias impostas, indicando as reações de apoio (com valores, sinais e unidades) que correspondem aos *coeficientes de rigidez globais* K_{ij} . Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores, sinais e unidades dos coeficientes de rigidez à mão.

Item (e) - Sistema de equações de equilíbrio

Com base nos resultados dos itens (c) e (d), monte o sistema de equações de equilíbrio que resulta da solução do quadro original pelo Método dos Deslocamentos. Os valores numéricos dos coeficientes deste sistema de equações são obtidos dos termos de carga e dos coeficientes de rigidez.

Item (f) - Verificação da solução do sistema de equações de equilíbrio

Com base nos resultados da estrutura original do item (a), verifique se os valores das deslocabilidades correspondem realmente à solução do sistema de equações obtido no item (e).

Item (g) - Obtenção de esforços internos

Indique os passos seguintes à solução do sistema de equações de equilíbrio que seriam necessários para complementar o cálculo dos esforços internos da estrutura pelo Método dos Deslocamentos.

ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 1º Semestre - 2022

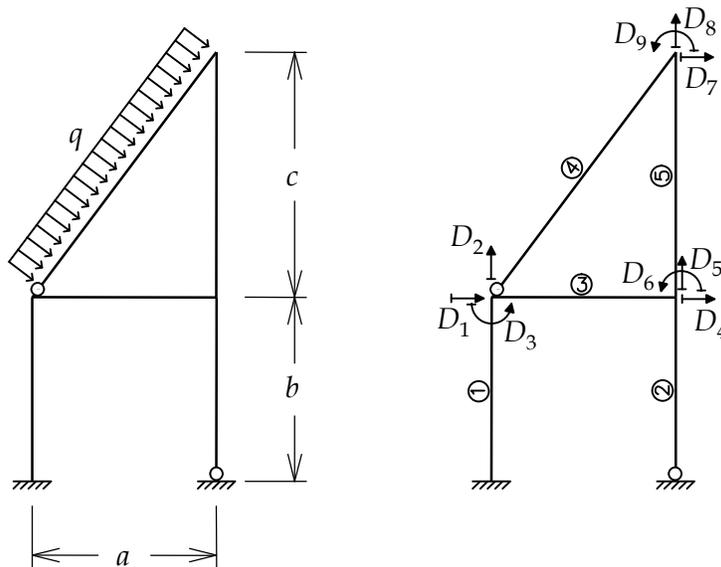
Grau G2 - 3ª Questão - Aplicação: 04/10/2021, 14 hs - Entrega: 18/10/2021, 9 hs

3ª Questão (3,0 pontos)

Empregando-se o Método dos Deslocamentos e com o auxílio do Ftool, obter os diagramas de esforços normais (axiais), esforços cortantes, e momentos fletores para o pórtico plano mostrado abaixo. Alguns passos da solução devem ser mostrados, conforme os itens indicados na próxima página.

Todas as barras têm material com módulo de elasticidade $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ e seção transversal com área $A = 0.0012 \text{ m}^2$ e momento de inércia $I = 0.00036 \text{ m}^4$. Considera-se deformações axiais e por flexão e despreza-se deformações por cisalhamento.

As barras e as deslocabilidades globais (D_i) do modelo estrutural estão numeradas conforme indica a figura inferior (números das barras indicados por círculos).



Consulte pelo seu número de matrícula os dados do seu modelo na tabela fornecida.

Matrícula	a [m]	b [m]	c [m]	q [kN/m]
1512657	3.00	5.00	5.00	8
1520955	4.00	6.00	4.00	12
1611270	5.00	7.00	3.00	16
1620733	6.00	8.00	2.00	20
1621571	3.00	6.00	4.00	12
1621636	4.00	7.00	3.00	16
1711383	5.00	8.00	2.00	20
1720486	6.00	5.00	5.00	8
1721620	3.00	7.00	3.00	16
1721622	4.00	8.00	2.00	20
1811612	5.00	5.00	5.00	8
1910673	6.00	6.00	4.00	12
1911243	3.00	8.00	2.00	20

Leia com atenção as instruções abaixo e os enunciados dos itens da questão.

A solução da 3ª Questão do grau G2 deve ser entregue na página da disciplina no Moodle/CCEAD em um arquivo em formato PDF com o seguinte nome: **ENG1204-212-G2-Q3-matricula.pdf**, em que **matricula** é o número de matrícula da aluna ou do aluno. Não serão aceitas respostas após 09 hs do dia 18/10/2021.

As soluções podem ser feitas à mão em papel e digitalizadas, criadas digitalmente através de algum editor de texto, ou por uma combinação de trechos e desenhos feitos à mão e digitalizados com trechos editados digitalmente.

Além do relatório, deverá ser entregue um vídeo gravado, com imagem e áudio do próprio aluno, com uma explicação sucinta sobre a solução adotada. O arquivo do vídeo deve ter o seguinte nome **ENG1204-212-G2-Q3-matricula.EXT**, em que **EXT** é a extensão do nome do arquivo de acordo com o formato do vídeo.

Opções de configuração no Ftool:

Unidades gerais adotadas: [kN-m] (configure utilizando a opção *Units & Number Formatting...* do menu *Options*).

Unidade para distâncias: [m]; número de casas decimais para distâncias: 2.

Unidade para forças: [kN]; número de casas decimais para forças: 2.

Unidade para momentos: [kNm]; número de casas decimais para momentos: 2.

Unidade para forças distribuídas: [kN/m]; número de casas decimais para forças distribuídas: 0 (nenhuma casa decimal).

Valor e unidade do módulo de elasticidade do material (*Generic Isotropic*) para todas as barras: $E = 2 \times 10^8$ kN/m² (2.0e+08 kN/m²). Os demais parâmetros de material não são utilizados nesta solução. Deixar os valores *default*.

Parâmetros de seção transversal (*Generic/Integral Properties*) para todas as barras:

Valor e unidade da área da seção transversal: $A = 0.0012$ m².

Valor e unidade do momento de inércia da seção transversal: $I = 0.00036$ m⁴.

Os demais parâmetros de seção transversal não são utilizados nesta solução. Deixar os valores *default* nulos.

Todas as barras dos modelos estruturais são consideradas com deformação por flexão, com deformação axial e sem deformação por cisalhamento (efeito cortante). Para configurar isso no Ftool, no menu *Deformation Constraints* selecione *Flexible Member*, deixe a opção *Axial Deformation* selecionada e deixe a opção *Shear Deformation* NÃO selecionada. Aplique isso para todas as barras.

Pede-se:

Item (3.a) – Diagramas de esforços internos (0,5 ponto)

Mostre os diagramas de esforços normais, esforços cortantes e momentos fletores utilizando as unidades e a precisão numérica (número de casas decimais) indicadas acima.

Item (3.b) – Matriz de rigidez local no sistema global (0,5 ponto)

Mostre as expressões dos coeficientes de rigidez da matriz de rigidez local $[k]$ da barra 2 **no sistema global de eixos** em função do comprimento d da barra, do módulo de elasticidade E do material, da área A da seção transversal e do momento de inércia I da seção transversal. Calcule numericamente os coeficientes de rigidez locais no sistema global e mostre os valores com sinal e unidades. Utilize uma casa decimal para os coeficientes de rigidez. Você pode verificar os valores comparando com resultados do Ftool para um modelo com a barra 2 isolada.

Item (3.c) – Coeficientes de rigidez global (0,5 ponto)

Mostre as expressões dos coeficientes de rigidez global K_{44} e K_{64} em função dos comprimentos a , b e c , do módulo de elasticidade E , da área A da seção transversal e do momento de inércia I da seção transversal. Calcule numericamente esses coeficientes de rigidez globais e mostre os valores com sinal e unidades. Utilize uma casa decimal para os coeficientes de rigidez. Você pode verificar os valores comparando com resultados do Ftool.

Item (3.d) – Esforços internos finais nas extremidades de barra (1,5 pontos)

Calcule os esforços internos nas extremidades da barra 4 e compare com os resultados obtidos para esta barra pelo Ftool. Os esforços internos devem ser calculados superpondo as reações de engastamento locais provocadas pelo carregamento na barra – caso (0) – com os esforços provocados pelos deslocamentos e rotações dos nós da barra. Nesse cálculo, os deslocamentos e rotações dos nós da barra devem ser obtidos da análise pelo Ftool. Como referência, consulte o documento **ENG1204-EsforcocosFinaisEmBarras.pdf** fornecido junto com o enunciado da questão.

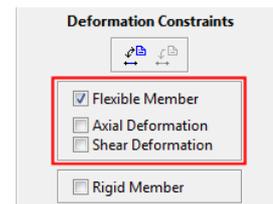
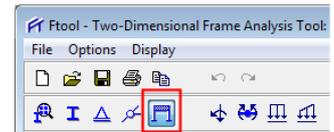
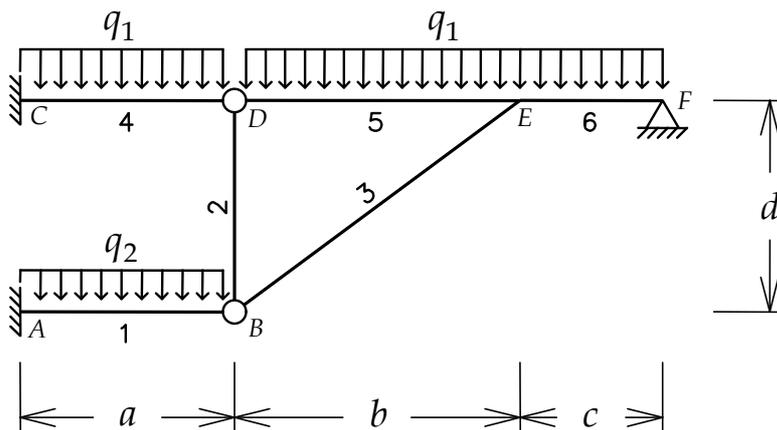
ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 1º Semestre - 2022

Grau G2 - 4ª Questão - Aplicação: 25/10/2021, 9 hs - Entrega: 08/11/2021, 9 hs

4ª Questão (3,0 pontos)

Empregando-se o Método dos Deslocamentos, obter o diagrama de momentos fletores para o pórtico plano mostrado abaixo com barras inextensíveis. Todos os passos da solução, indicados na próxima página, devem ser mostrados. Cada aluno tem um conjunto de valores para os parâmetros do modelo de acordo com seu número de matrícula, conforme indica a tabela abaixo. Sugestão: crie o seu modelo estrutural no Ftool e verifique as soluções dos itens do problema.

Desprezar deformações axiais e deformações por cisalhamento. Considera-se apenas deformações por flexão. Todas as barras têm material com módulo de elasticidade $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ e seção transversal com área $A = 0.0012 \text{ m}^2$ e momento de inércia $I = 0.00036 \text{ m}^4$. A área da seção transversal deve ser especificada no Ftool, embora na solução manual a área da seção transversal não seja utilizada porque são barras inextensíveis. No Ftool, não se esqueça de especificar todas as barras sem deformação axial e sem deformação por cisalhamento conforme indicado abaixo.



Matrícula	a [m]	b [m]	c [m]	d [m]	q_1 [kN/m]	q_2 [kN/m]
1512657	3.00	5.00	5.00	2.00	8	16
1611270	4.00	6.00	4.00	5.00	10	14
1620733	5.00	7.00	3.00	4.00	12	12
1621571	6.00	8.00	2.00	3.00	14	10
1621636	3.00	6.00	4.00	2.00	16	8
1720486	4.00	7.00	3.00	5.00	8	16
1721620	5.00	8.00	2.00	4.00	10	14
1721622	6.00	5.00	5.00	4.00	12	12
1811612	3.00	7.00	3.00	3.00	14	10
1910673	4.00	8.00	2.00	2.00	16	8
1911243	5.00	5.00	5.00	5.00	8	16

Itens da questão

Item (a) – Identificação das deslocabilidades e Sistema Hipergeométrico (0,5 ponto)

Indique em uma figura as deslocabilidades do modelo estrutural explorando ao máximo os procedimentos adotados para redução do número de deslocabilidades: (i) consideração de trechos em balanço, (ii) consideração de barras inextensíveis, e (iii) consideração de articulações. Mostre o Sistema Hipergeométrico (SH) correspondente em uma figura, com os apoios fictícios numerados de acordo com a numeração das deslocabilidades.

Item (b) – Caso básico (0) (0,5 ponto)

Para o SH do item (a), aplique o carregamento externo. Isto corresponde ao caso (0) do Método dos Deslocamentos. Em uma figura, indique os termos de carga β_{i0} . Mostre os valores dos termos de carga com unidades e sinais, e indique os procedimentos adotados para calcular esses termos. Indique os valores dos momentos fletores nas extremidades das barras do modelo utilizando a convenção de sinais do Método dos Deslocamentos.

Item (c) – Casos básicos que isolam as deslocabilidades (1,0 ponto)

Imponha ao SH, alternadamente, deslocamentos ou rotações prescritas com valores unitários nos nós onde os apoios fictícios foram inseridos na criação do SH. Isso deve gerar um caso de solicitação para cada deslocabilidade imposta independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos básicos (j) do Método dos Deslocamentos, onde j é o número de uma deslocabilidade. Para cada caso básico, mostre a configuração deformada da estrutura para a deslocabilidade unitária imposta, indicando os coeficientes de rigidez globais K_{ij} . Mostre os valores dos coeficientes de rigidez globais de cada caso básico com unidades e sinais, e indique os procedimentos adotados para calcular esses coeficientes. Para cada caso básico, indique os valores dos momentos fletores nas extremidades das barras do modelo utilizando a convenção de sinais do Método dos Deslocamentos.

Item (d) – Sistema de equações de equilíbrio (0,5 ponto)

Com base nos resultados dos itens (b) e (c), monte o sistema de equações de equilíbrio que resulta da solução do pórtico original pelo Método dos Deslocamentos. Resolva esse sistema e obtenha os valores das deslocabilidades. Indique esses valores com unidades e sinais.

Item (e) – Obtenção do diagrama de momentos fletores finais (0,5 ponto)

Através da superposição dos momentos fletores dos casos básicos dos itens (b) e (c), ponderados pelos valores das deslocabilidades obtidos no item (d), indique os valores dos momentos fletores finais nas extremidades das barras do modelo utilizando a convenção de sinais do Método dos Deslocamentos. Mostre o diagrama de momentos fletores finais desenhado na forma convencional (ordenadas do diagrama traçadas do lado da fibra tracionada das barras).

PUC-Rio – Análise de Estruturas II – *Luiz Fernando Martha*

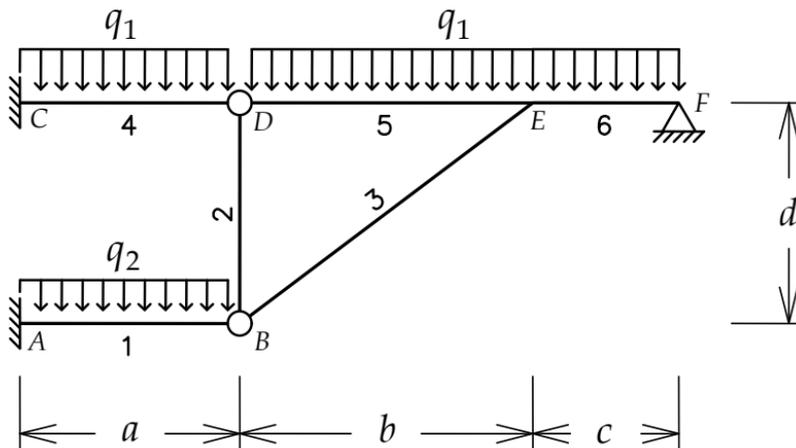
2021.2

Método dos Deslocamentos

Grau G2 – 4ª Questão – Solução

Pórtico com barras inextensíveis e articulações

Pórtico com barras inextensíveis e articulações



Todas as barras são inextensíveis, com inércia à flexão EI constante.

Pede-se o diagrama de momentos fletores.

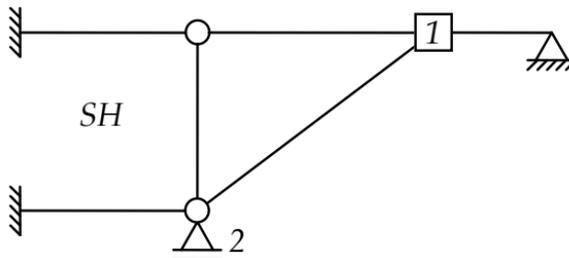
Pórtico com barras inextensíveis e articulações

Parâmetros do modelo estrutural por número de matrícula

Matrícula	a [m]	b [m]	c [m]	d [m]	q_1 [kN/m]	q_2 [kN/m]
1512657	3.00	5.00	5.00	2.00	8	16
1611270	4.00	6.00	4.00	5.00	10	14
1620733	5.00	7.00	3.00	4.00	12	12
1621571	6.00	8.00	2.00	3.00	14	10
1621636	3.00	6.00	4.00	2.00	16	8
1720486	4.00	7.00	3.00	5.00	8	16
1721620	5.00	8.00	2.00	4.00	10	14
1721622	6.00	5.00	5.00	4.00	12	12
1811612	3.00	7.00	3.00	3.00	14	10
1910673	4.00	8.00	2.00	2.00	16	8
1911243	5.00	5.00	5.00	5.00	8	16

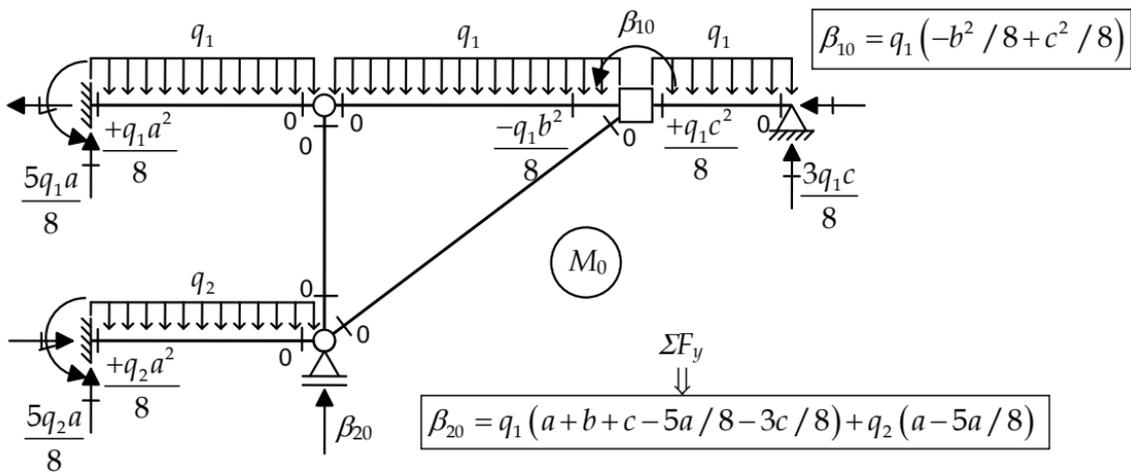
Pórtico com barras inextensíveis e articulações

Sistema Hipergeométrico



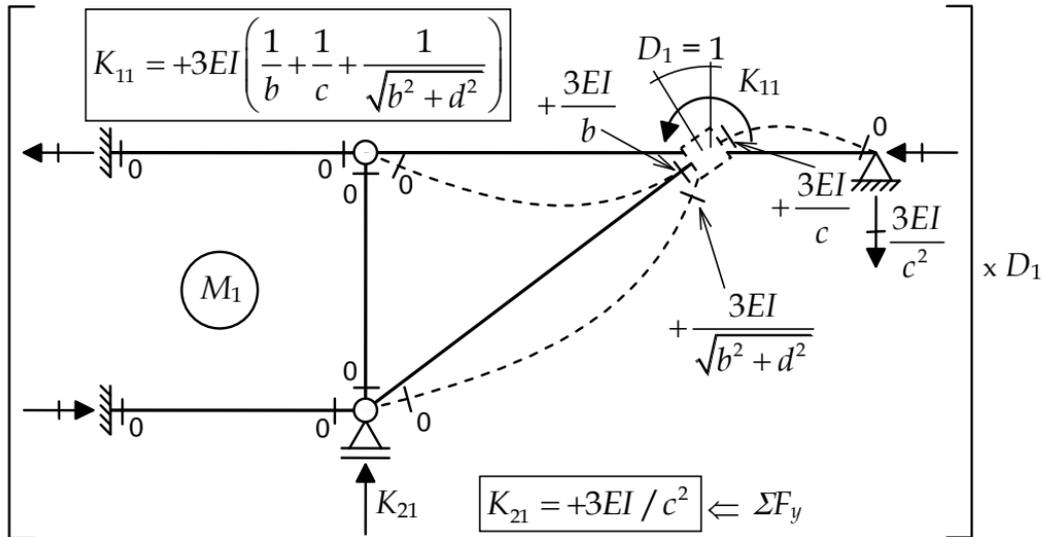
Pórtico com barras inextensíveis e articulações

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH



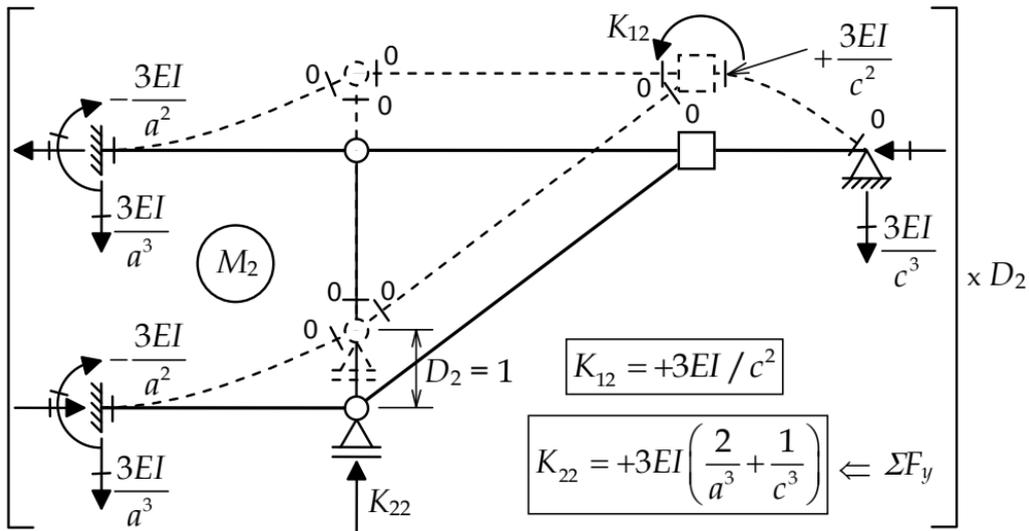
Pórtico com barras inextensíveis e articulações

Caso (1) - Deslocabilidade D_1 isolada no SH



Pórtico com barras inextensíveis e articulações

Caso (2) – Deslocabilidade D_2 isolada no SH



Pórtico com barras inextensíveis e articulações

Equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} \beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 = 0 \\ \beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\beta_{10} = q_1 \left(-b^2 / 8 + c^2 / 8 \right)$$

$$\beta_{20} = q_1 \left(a + b + c - 5a / 8 - 3c / 8 \right) + q_2 \left(a - 5a / 8 \right)$$

$$K_{11} = +3EI \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + d^2}} \right)$$

$$K_{12} = K_{21} = +3EI / c^2$$

$$K_{22} = +3EI \left(\frac{2}{a^3} + \frac{1}{c^3} \right)$$

Pórtico com barras inextensíveis e articulações

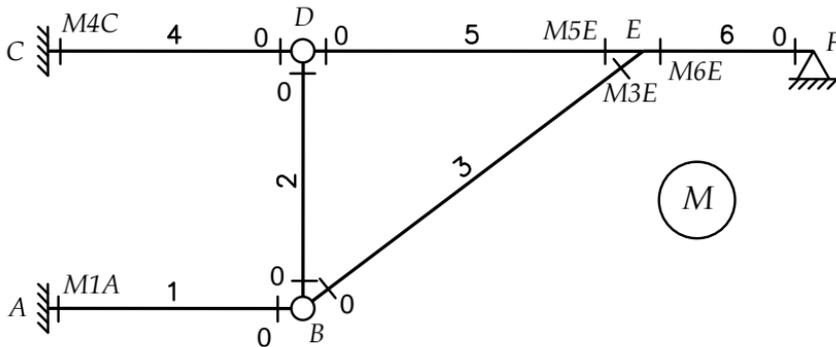
Termos de carga, coeficientes de rigidez e solução das equações de equilíbrio (cálculo das deslocabilidades):

Matrícula	β_{10} [kNm]	β_{20} [kN]	K_{11} [kNm/rad]	K_{12} [kNm/m]	K_{22} [kN/m]	D_1 [rad·10 ⁻³]	D_2 [m·10 ⁻³]
1512657	0	92	126510	8640	17728	0.3666	-5.3682
1611270	-25	121	117656	13500	10125	1.8698	-14.444
1620733	-60	151.5	129649	24000	11456	4.7548	-23.186
1621571	-105	183.5	160281	54000	29000	7.4786	-20.253
1621636	-40	163	124153	13500	19375	1.3384	-9.3455
1720486	-40	107	127967	24000	14750	2.4079	-11.172
1721620	-75	137.5	159149	54000	30456	5.0279	-13.429
1721622	0	151.5	120133	8640	3728	3.5073	-48.767
1811612	-70	151.25	131219	24000	24000	2.0635	-8.3656
1910673	-120	184	161194	54000	33750	5.5406	-14.317
1911243	0	110	116947	8640	5184	1.7878	-24.199

Pórtico com barras inextensíveis e articulações

Cálculo dos momentos fletores em extremidades de barras:

$$M = M_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2$$



Pórtico com barras inextensíveis e articulações

*Cálculo dos momentos fletores em extremidades de barras:
(convenção de sinais do Método dos Deslocamentos)*

$$M = M_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2$$

Matrícula	M1A [kNm]	M3E [kNm]	M4C [kNm]	M5E [kNm]	M6E [kNm]
1512657	146.84	14.71	137.84	-9.16	-5.54
1611270	222.99	51.71	214.99	22.31	-74.02
1620733	237.83	127.39	237.83	73.22	-200.61
1621571	166.52	189.07	184.52	89.82	-278.99
1621636	233.29	45.71	242.29	-23.82	-21.89
1720486	182.82	60.46	166.82	25.30	-8.57
1721620	159.78	121.42	147.28	55.75	-177.18
1721622	346.60	118.31	346.60	114.02	-232.33
1811612	212.02	58.53	216.52	-22.07	-36.45
1910673	209.28	145.13	225.28	21.59	-166.72
1911243	259.08	54.61	234.08	52.23	-106.84

Pórtico com barras inextensíveis e articulações

Diagrama de momentos fletores finais:

$$M = M_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2$$

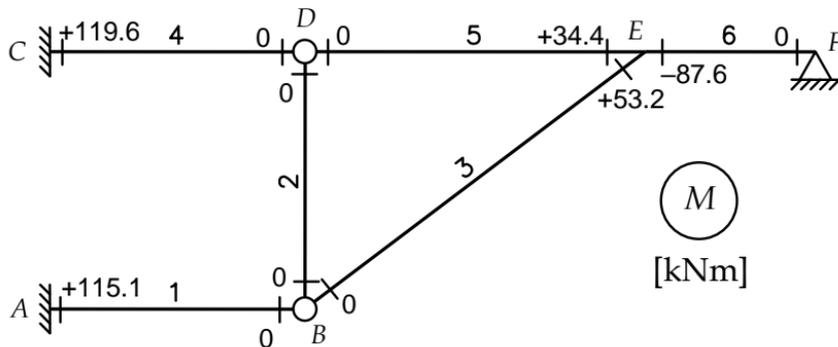
(convenção de sinais do Método dos Deslocamentos)

Solução para:

$$a = 3 \text{ m}; b = 4 \text{ m}; c = 2 \text{ m}; d = 3 \text{ m}; q_1 = 16 \text{ kN/m}; q_2 = 12 \text{ kN/m}$$

$$D_1 = +1.230 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$D_2 = -4.231 \times 10^{-3} \text{ m}$$



Pórtico com barras inextensíveis e articulações

Diagrama de momentos fletores finais: $M = M_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2$

Solução para:

$a = 3 \text{ m}; b = 4 \text{ m}; c = 2 \text{ m}; d = 3 \text{ m}; q_1 = 16 \text{ kN/m}; q_2 = 12 \text{ kN/m}$

$D_1 = +1.230 \times 10^{-3} \text{ rad}$

$D_2 = -4.231 \times 10^{-3} \text{ m}$

