

# ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 1º Semestre - 2022

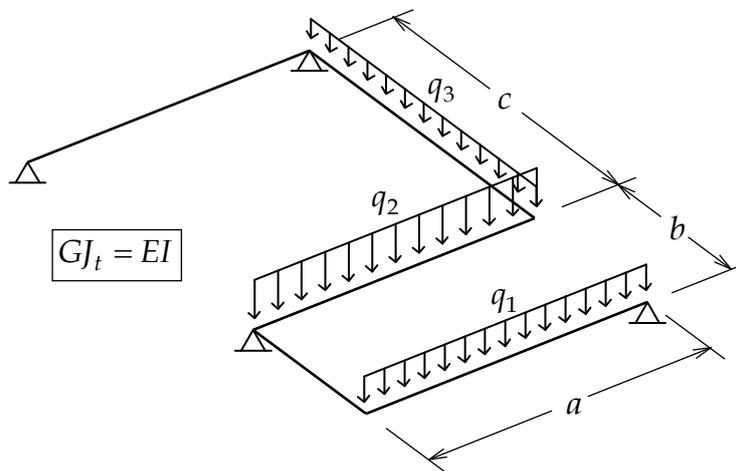
Grau G2 - 1ª Questão - Aplicação: 18/04/2022, 14 hs - Entrega: 25/04/2022, 9 hs

## 1ª Questão (2,5 pontos)

Empregando-se o Método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores e de momentos de torção para a grelha abaixo. Todos os passos da solução têm de ser indicados. Isto é, mostre:

1. Cálculo dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade.
2. Sistema de equações de compatibilidade.
3. Valores dos hiperestáticos obtidos da solução deste sistema.
4. Superposição para obtenção dos diagramas finais.

Todas as barras têm a relação indicada entre a rigidez à flexão  $EI$  e a rigidez à torção  $GJ_t$ , em que  $E$  é módulo de elasticidade do material,  $G$  é o módulo de cisalhamento do material,  $I$  é o momento de inércia à flexão da seção transversal e  $J_t$  é o momento de inércia à torção da seção transversal.



Consulte pelo seu número de matrícula os dados do seu modelo na tabela fornecida.

Matrícula	$a$ [m]	$b$ [m]	$c$ [m]	$q_1$ [kN/m]	$q_2$ [kN/m]	$q_3$ [kN/m]
1711629	3	3	6	6	10	10
1712109	4	4	5	8	8	8
1720329	5	5	4	10	6	6
1812132	6	6	3	12	4	4
1820449	3	4	5	8	10	8
1820493	4	5	4	10	8	6
1820664	5	6	3	12	6	4
1820705	6	3	6	6	4	10
1820809	3	5	4	10	10	6
1911308	4	6	3	12	8	4
1911338	5	3	6	6	6	10
1912968	6	4	5	8	4	8
1920622	3	6	3	12	10	4
2111170	4	3	6	6	8	10

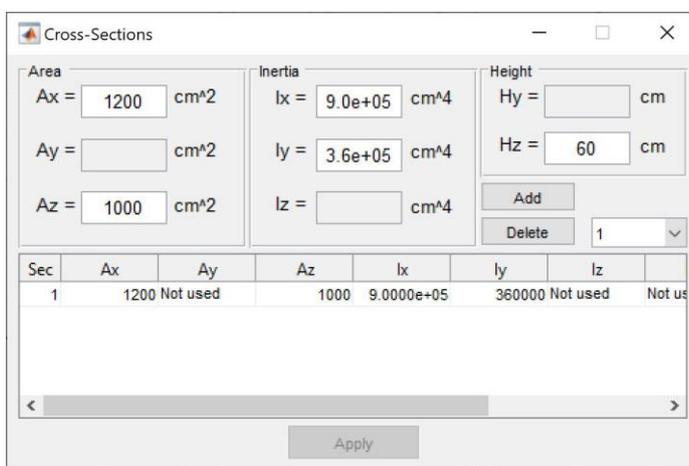
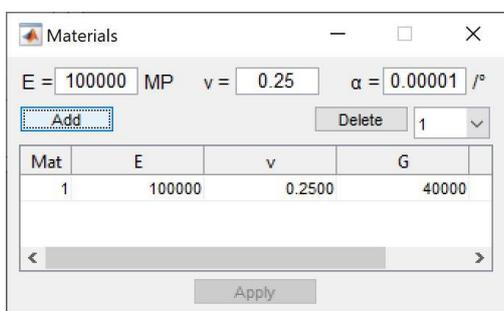
O relatório da tarefa deve ser entregue na página da disciplina no Moodle/CCEAD em um arquivo em formato PDF com o seguinte nome: **ENG1204-221-G2-Q1-matricula.pdf**, em que **matricula** é o número de matrícula da aluna ou do aluno.

Além do relatório, deverá ser entregue um vídeo gravado, com imagem e áudio do próprio aluno, com uma explicação sucinta sobre a solução adotada. O arquivo do vídeo deve ter o seguinte nome **ENG1204-221-G2-Q1-matricula.EXT**, em que **EXT** é a extensão do nome do arquivo de acordo com o formato do vídeo.

Não serão aceitas respostas após 9 hs do dia 25/04/2022.

Sugere-se o uso do programa LESM (para análise de pórticos e treliças planas, grelhas, e pórticos e treliças espaciais): <http://www.tecgraf.puc-rio.br/lesm>.

Os seguintes parâmetros de material e de seção transversal devem ser utilizados no LESM para obter a relação  $GJ_t = EI$  :



O valor do módulo de cisalhamento  $G$  do material é calculado automaticamente pelo LESM através da expressão:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

em que  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material.

# ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 1º Semestre - 2022

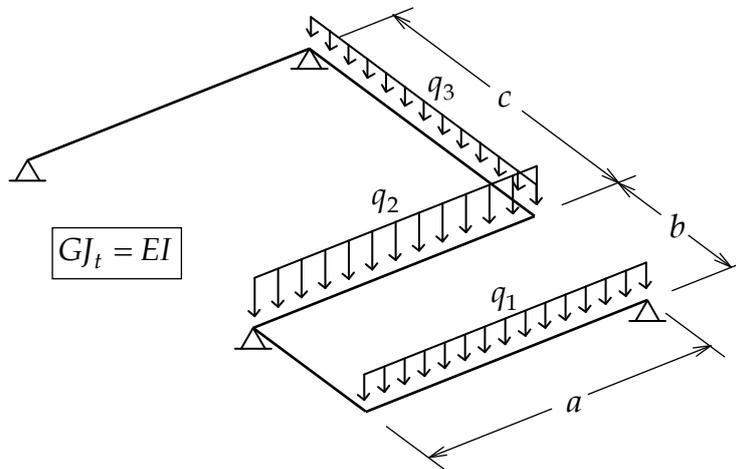
Grau G2 - 1ª Questão - Aplicação: 18/04/2022, 14 hs - Entrega: 25/04/2022, 9 hs

## 1ª Questão (2,5 pontos)

Empregando-se o Método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores e de momentos de torção para a grelha abaixo. Todos os passos da solução têm de ser indicados. Isto é, mostre:

1. Cálculo dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade.
2. Sistema de equações de compatibilidade.
3. Valores dos hiperestáticos obtidos da solução deste sistema.
4. Superposição para obtenção dos diagramas finais.

Todas as barras têm a relação indicada entre a rigidez à flexão  $EI$  e a rigidez à torção  $GJ_t$ , em que  $E$  é módulo de elasticidade do material,  $G$  é o módulo de cisalhamento do material,  $I$  é o momento de inércia à flexão da seção transversal e  $J_t$  é o momento de inércia à torção da seção transversal.



Consulte pelo seu número de matrícula os dados do seu modelo na tabela fornecida.

Matrícula	$a$ [m]	$b$ [m]	$c$ [m]	$q_1$ [kN/m]	$q_2$ [kN/m]	$q_3$ [kN/m]
1711629	3	3	6	6	10	10
1712109	4	4	5	8	8	8
1720329	5	5	4	10	6	6
1812132	6	6	3	12	4	4
1820449	3	4	5	8	10	8
1820493	4	5	4	10	8	6
1820664	5	6	3	12	6	4
1820705	6	3	6	6	4	10
1820809	3	5	4	10	10	6
1911308	4	6	3	12	8	4
1911338	5	3	6	6	6	10
1912968	6	4	5	8	4	8
1920622	3	6	3	12	10	4
2111170	4	3	6	6	8	10

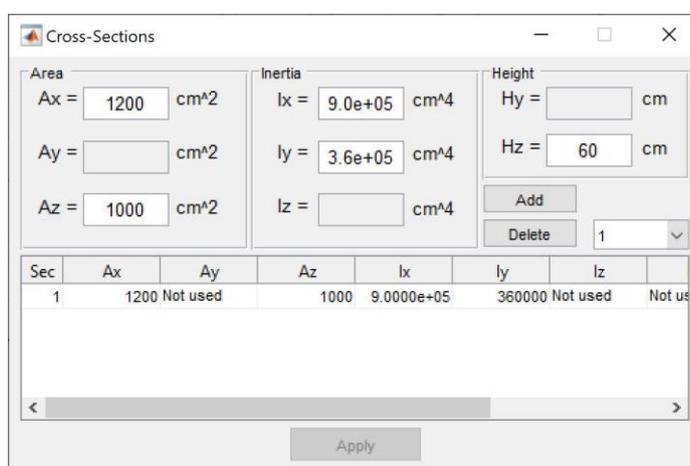
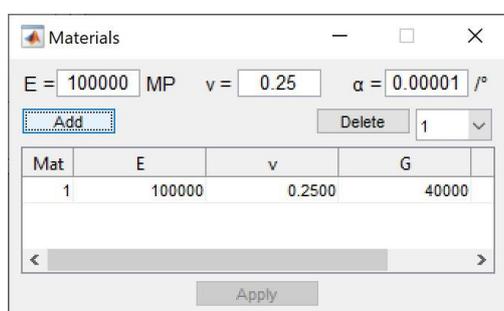
O relatório da tarefa deve ser entregue na página da disciplina no Moodle/CCEAD em um arquivo em formato PDF com o seguinte nome: **ENG1204-221-G2-Q1-matricula.pdf**, em que **matricula** é o número de matrícula da aluna ou do aluno.

Além do relatório, deverá ser entregue um vídeo gravado, com imagem e áudio do próprio aluno, com uma explicação sucinta sobre a solução adotada. O arquivo do vídeo deve ter o seguinte nome **ENG1204-221-G2-Q1-matricula.EXT**, em que **EXT** é a extensão do nome do arquivo de acordo com o formato do vídeo.

Não serão aceitas respostas após 9 hs do dia 25/04/2022.

Sugere-se o uso do programa LESM (para análise de pórticos e treliças planas, grelhas, e pórticos e treliças espaciais): <http://www.tecgraf.puc-rio.br/lesm>.

Os seguintes parâmetros de material e de seção transversal devem ser utilizados no LESM para obter a relação  $GJ_t = EI$  :

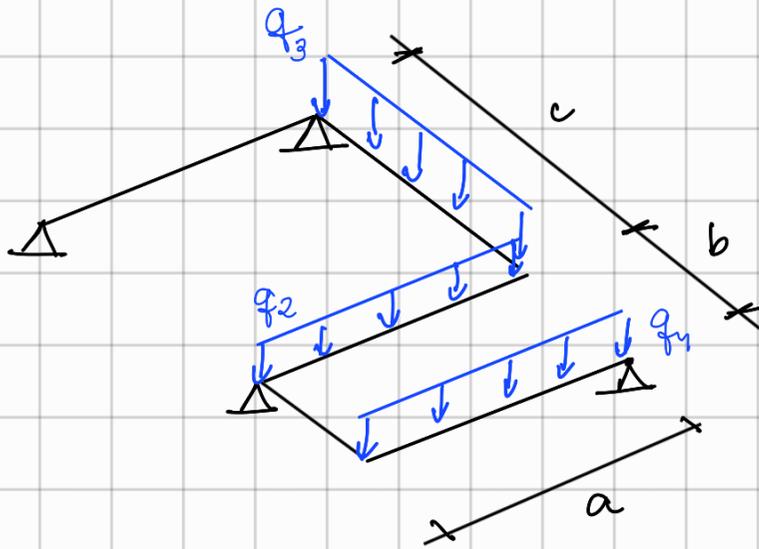


O valor do módulo de cisalhamento  $G$  do material é calculado automaticamente pelo LESM através da expressão:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

em que  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material.

Solução analítica :



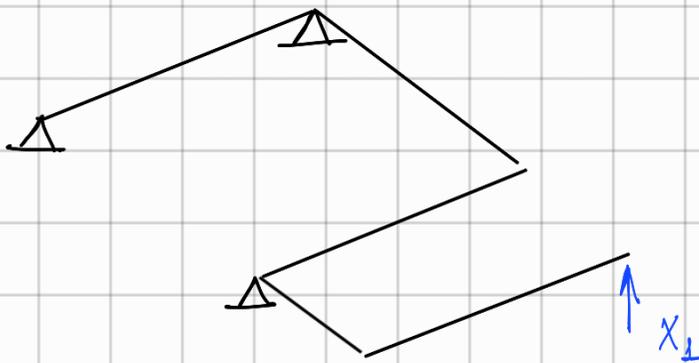
considere :

$$GJ_t = EI_z$$

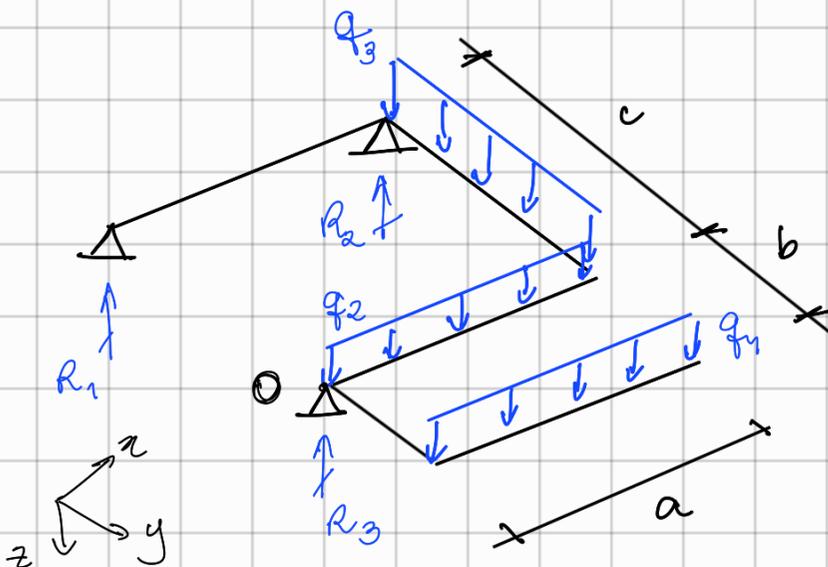
Grau de hiperestaticidade :

$$g = 4 - 3 = 1$$

① Sistema Principal :



② sistema básico 0 :



$$\sum F_v = 0 :$$

$$R_1 + R_2 + R_3 + q_3 c + (q_2 + q_1) a = 0$$

Obtenção das reações de apoio:

$$\Sigma F_v = 0: R_1 + R_2 + R_3 - q_3 c - q_2 a - q_1 a = 0$$

$$\Sigma M_o_x = 0: \frac{q_1 a^2}{2} + \frac{q_2 a^2}{2} + q_3 \cdot c \cdot a - R_2 \cdot a = 0$$

$$R_2 = (q_1 + q_2) \frac{a}{2} + q_3 \cdot c$$

$$\Sigma M_o_y = 0: q_1 \cdot a \cdot b - q_3 \cdot \frac{c^2}{2} + R_2 \cdot c + R_1 \cdot c = 0$$

$$-R_1 \cdot c = q_1 \cdot a \cdot b - q_3 \cdot \frac{c^2}{2} + \left[ (q_1 + q_2) \frac{a}{2} + q_3 c \right] \cdot c$$

$$-R_1 = q_1 \frac{ab}{c} - q_3 \frac{c}{2} + (q_1 + q_2) \frac{a}{2} + q_3 c$$

$$R_1 = -q_1 \frac{ab}{c} - q_3 \frac{c}{2} - (q_1 + q_2) \frac{a}{2}$$

$$R_1 = -q_1 \left( \frac{ab}{c} + \frac{a}{2} \right) - q_2 \frac{a}{2} - q_3 \frac{c}{2}$$

$$\Sigma F_v = 0: R_3 = q_3 c + q_2 a + q_1 a - R_2 - R_1$$

$$R_3 = \cancel{q_3 c} + q_2 a + q_1 a - \cancel{q_1 \frac{a}{2}} - \cancel{q_2 \frac{a}{2}} - \cancel{q_3 c} \\ + q_1 \frac{ab}{c} + \cancel{q_1 \frac{a}{2}} + \cancel{q_2 \frac{a}{2}} + q_3 \frac{c}{2}$$

$$R_3 = q_1 \left( a + \frac{ab}{c} \right) + q_2 a + q_3 \frac{c}{2}$$

Diagramma di momento flettor :

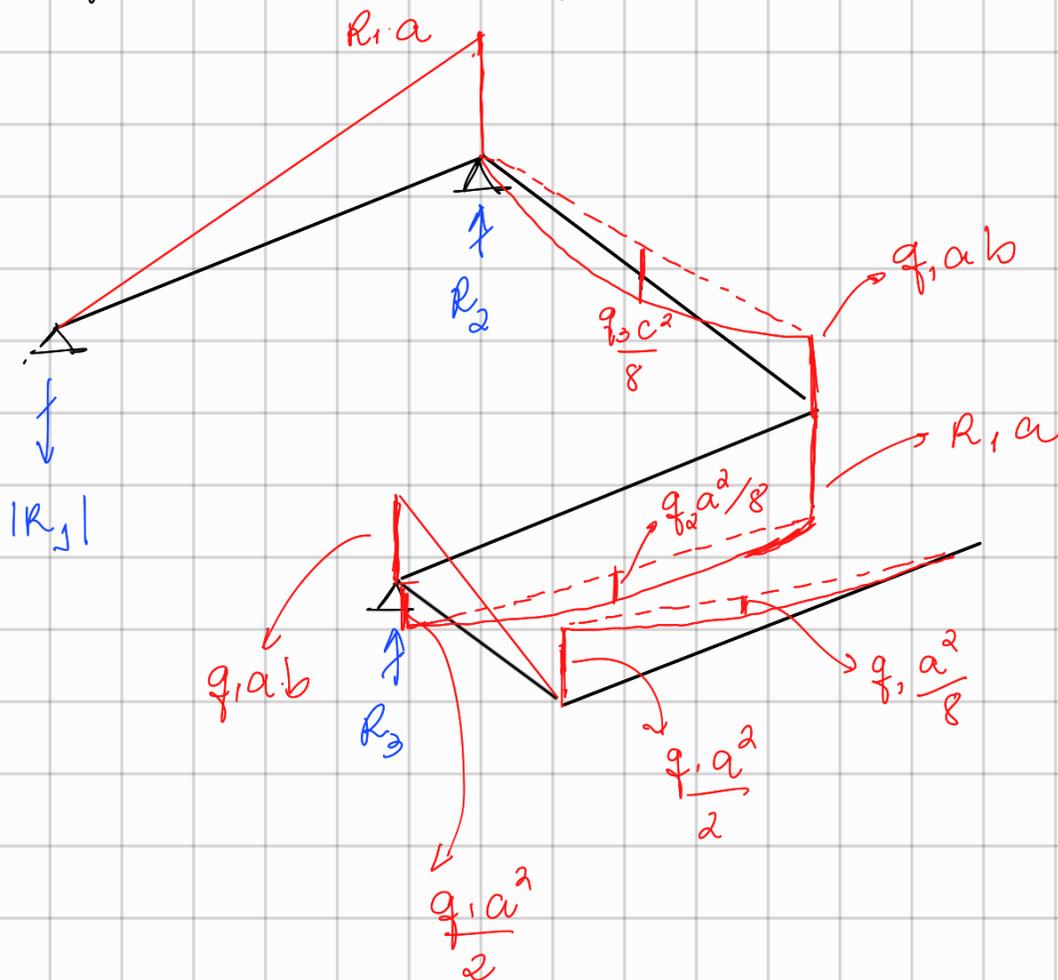
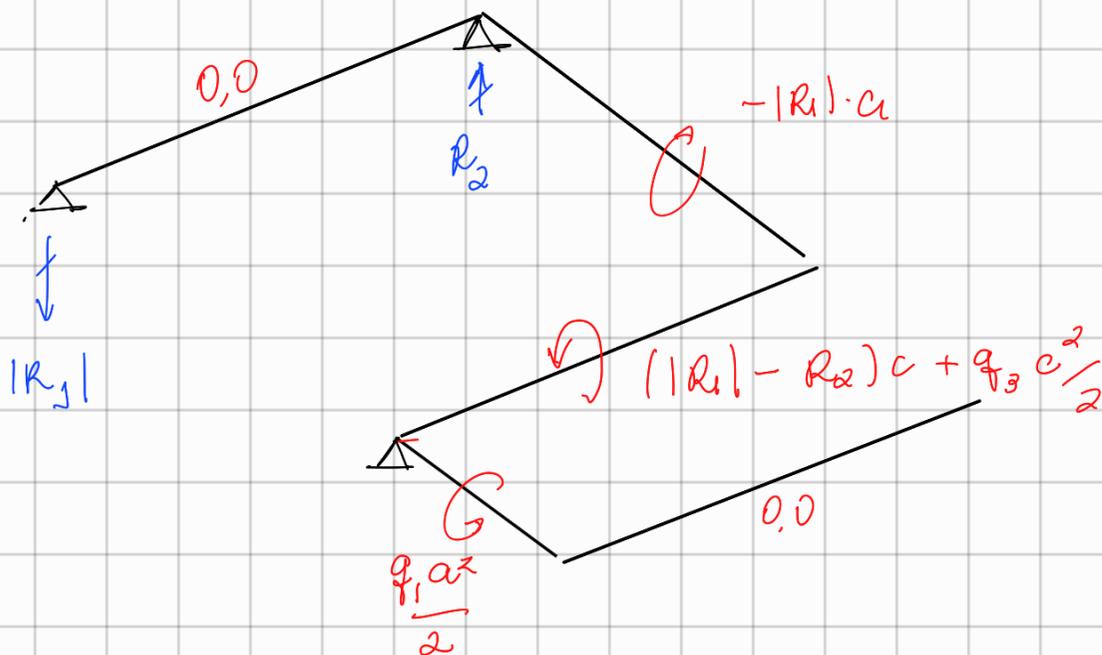
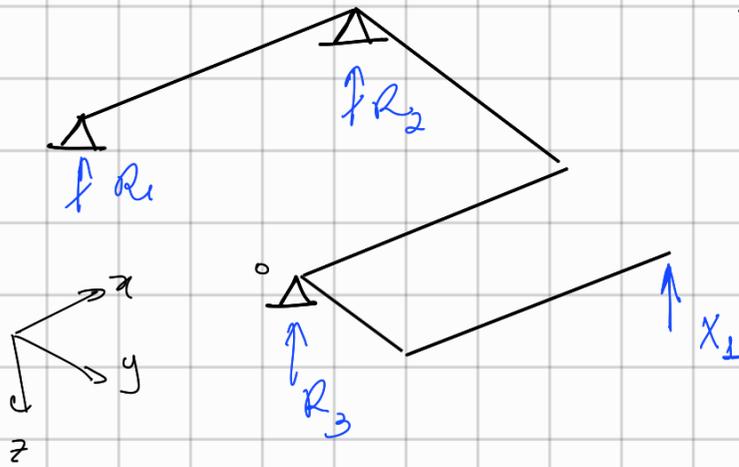


Diagramma di momento torsor



③ Sistema básico 1



$$\Sigma M_{Oy} : R_2 \cdot a + X_1 \cdot a = 0$$

$$R_2 = -X_1$$

$$\Sigma M_{Ox} : R_1 \cdot c + R_2 \cdot c - X_1 \cdot b = 0$$

$$R_1 \cdot c = X_1 \cdot (c + b)$$

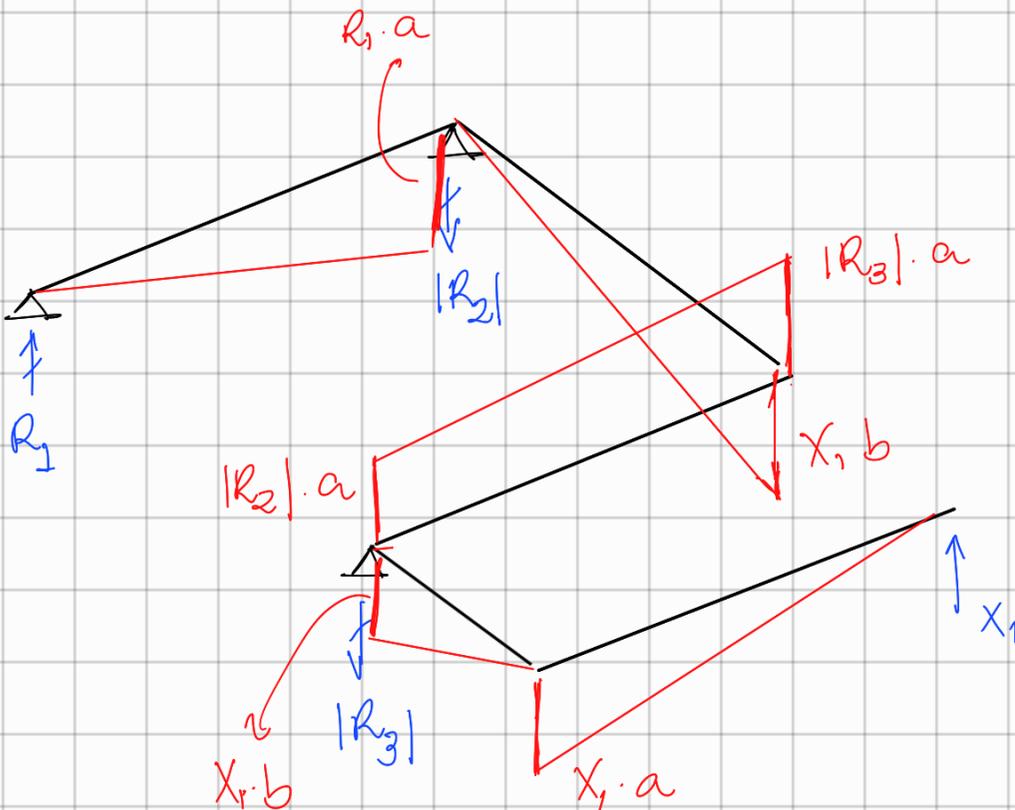
$$R_1 = X_1 \cdot \frac{(c + b)}{c}$$

$$\Sigma F_v : R_1 + R_2 + R_3 + X_1 = 0$$

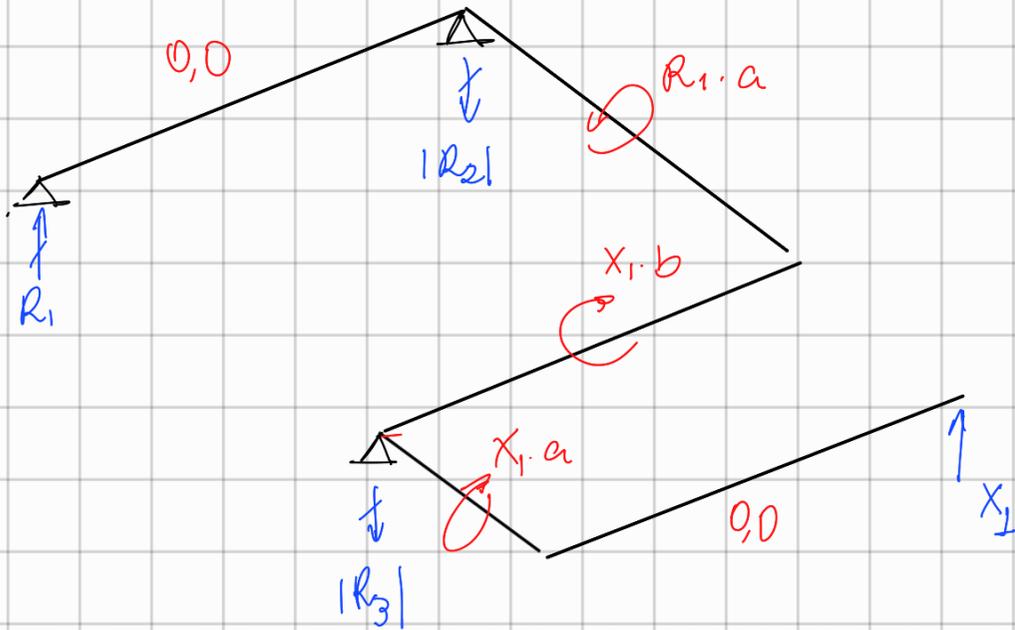
$$R_3 = -R_1$$

$$R_3 = -X_1 \cdot \frac{(c + b)}{c}$$

Diagrama de momente fletor :



## Diagrama de momento torção



③ Obtenção do termo de carga:

$$\delta_{10} = \int_{\text{est}} \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \int_{\text{est}} \frac{T_1 T_0}{GJ} dx$$

\* Cálculo feito no Maple

④ Obtenção do coeficiente de flexibilidade:

$$\delta_{10} = \int_{\text{est}} \frac{M_1 M_1}{EI} dx + \int_{\text{est}} \frac{T_1 T_1}{GJ} dx$$

\* Cálculo feito no Maple

⑤ Obtenção do hiperestático:  $X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$

## Propriedades mecânicas

$E$	100000000 kN/m <sup>2</sup>
$G$	40000000 kN/m <sup>2</sup>
$J$	0.009 m <sup>4</sup>
$I_y$	0.0036 m <sup>4</sup>

Matrícula	$a$ [m]	$b$ [m]	$c$ [m]	$q_1$ (kN/m)	$q_2$ (kN/m)	$q_3$ (kN/m)	Termo de carga	Coefficiente de flexibilidade	Hiperestático
							$\delta_{10}$	$\delta_{11}$	$X1$
1711629	3	3	6	6	10	10	-0.0231	0.0008	30.307
1712109	4	4	5	8	8	8	-0.0654	0.0018	35.976
1720329	5	5	4	10	6	6	-0.1838	0.0040	46.262
1812132	6	6	3	12	4	4	-0.5477	0.0088	62.241
1820449	3	4	5	8	10	8	-0.0299	0.0010	29.042
1820493	4	5	4	10	8	6	-0.0961	0.0025	39.055
1820664	5	6	3	12	6	4	-0.3090	0.0058	53.699
1820705	6	3	6	6	4	10	-0.1480	0.0035	42.604
1820809	3	5	4	10	10	6	-0.0434	0.0014	30.811
1911308	4	6	3	12	8	4	-0.1570	0.0035	44.478
1911338	5	3	6	6	6	10	-0.0911	0.0023	40.082
1912968	6	4	5	8	4	8	-0.2051	0.0045	45.823
1920622	3	6	3	12	10	4	-0.0691	0.0020	34.538
2111170	4	3	6	6	8	10	-0.0499	0.0014	36.125

# ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 1º Semestre - 2022

## G2-Q2: Simulação computacional do Método dos Deslocamentos 2ª questão do grau G2 (1,0 ponto) - Data da entrega: 04/05/2022

Estude o exemplo de solução de um pórtico pelo Método dos Deslocamentos ([http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp\\_pub/lfm/eng1204roteiroMD.pdf](http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp_pub/lfm/eng1204roteiroMD.pdf)). Assista no site da disciplina no Ambiente de Aprendizagem Online da PUC-Rio (<https://ead.puc-rio.br/login/index.php>) o vídeo "Vídeo 18: Método dos Deslocamentos: Introdução". Utilizando o programa Ftool, siga os passos descritos nos itens abaixo e escreva um relatório. Este relatório deve conter as figuras que forem necessárias para descrever a simulação e seus valores numéricos.

**Item (a)** - Estrutura original a ser resolvida

Defina arbitrariamente, usando o programa Ftool, um quadro plano **com pelo menos quatro deslocabilidades**. Defina também as propriedades elásticas e geométricas das barras e as cargas que atuam no quadro. Adote todas as unidades em kN e m. Crie uma figura com a estrutura, suas dimensões e todas as propriedades e cargas utilizadas. Essa figura deve mostrar a configuração deformada da estrutura, com as componentes de deslocamentos e rotações (com valores e unidades) dos nós do modelo estrutural indicadas. Essas componentes de deslocamentos e rotações dos nós são as incógnitas do Método dos Deslocamentos, são chamadas de *deslocabilidades*, e devem ser identificadas pelo nome  $D_j$ , sendo  $j$  o número da deslocabilidade. Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe as deslocabilidades com seus nomes, valores e unidades à mão. Anote os valores das deslocabilidades (com sinal) para usar no item (f).

**Item (b)** - Sistema Hipergeométrico

Obtenha uma estrutura completamente indeslocável (todos os nós com deslocamentos e rotações impedidos) a partir da inserção de vínculos externos (apoios fictícios) na estrutura do item (a). Essa estrutura será o Sistema Hipergeométrico (SH) para a resolução da estrutura original pelo Método dos Deslocamentos. Mostre o SH em uma figura com os apoios fictícios numerados de acordo com a numeração das deslocabilidades.

**Item (c)** - Caso básico (0)

Para o Sistema Hipergeométrico do item (b), mantenha o carregamento do item (a). Isto corresponde ao caso (0) do Método dos Deslocamentos. Mostre a configuração deformada da estrutura juntamente com o carregamento aplicado, indicando as reações de apoio (com valores e unidades) que correspondem aos termos de carga  $\beta_{i0}$ . Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores (com sinal) e unidades dos termos de carga à mão.

**Item (d)** - Casos básicos que isolam as deslocabilidades

Retire as cargas utilizadas no item (c) e imponha ao Sistema Hipergeométrico, alternadamente, deslocamentos ou rotações prescritas com valores unitários nos nós onde os vínculos foram inseridos no item (b). Utilize a opção *Prescribed Displacements* do menu *Support Conditions* para impor um deslocamento prescrito. Isso deve gerar um caso de solicitação para cada deslocabilidade imposta independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos ( $j$ ) do Método dos Deslocamentos, onde  $j$  é o número de uma deslocabilidade. Mostre a configuração deformada da estrutura para cada uma das deslocabilidades unitárias impostas, indicando as reações de apoio (com valores, sinais e unidades) que correspondem aos *coeficientes de rigidez globais*  $K_{ij}$ . Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores, sinais e unidades dos coeficientes de rigidez à mão.

**Item (e)** - Sistema de equações de equilíbrio

Com base nos resultados dos itens (c) e (d), monte o sistema de equações de equilíbrio que resulta da solução do quadro original pelo Método dos Deslocamentos. Os valores numéricos dos coeficientes deste sistema de equações são obtidos dos termos de carga e dos coeficientes de rigidez.

**Item (f)** - Verificação da solução do sistema de equações de equilíbrio

Com base nos resultados da estrutura original do item (a), verifique se os valores das deslocabilidades correspondem realmente à solução do sistema de equações obtido no item (e).

**Item (g)** - Obtenção de esforços internos

Indique os passos seguintes à solução do sistema de equações de equilíbrio que seriam necessários para complementar o cálculo dos esforços internos da estrutura pelo Método dos Deslocamentos.

# ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 1º Semestre - 2022

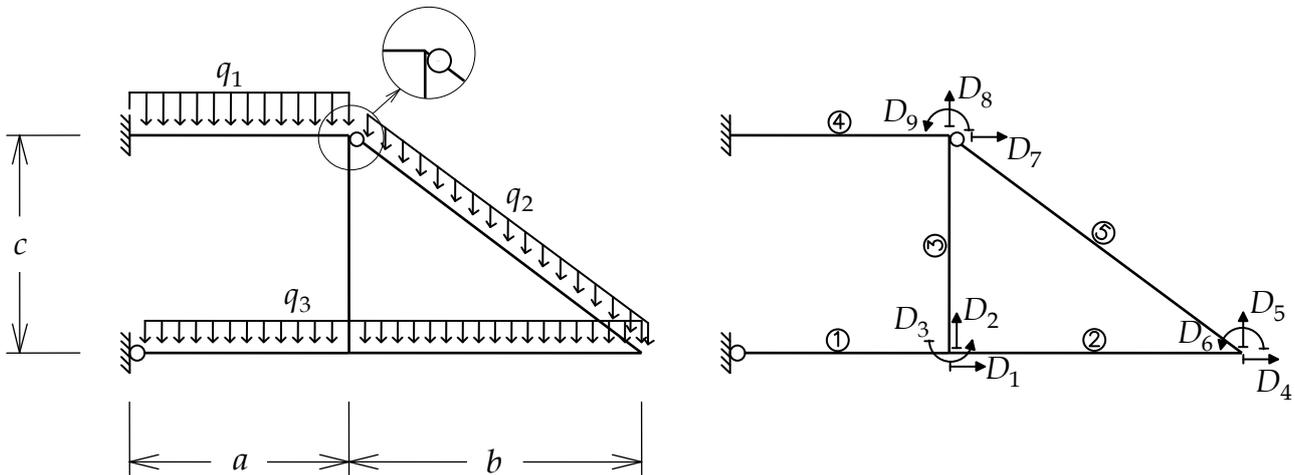
Grau G2 - 3ª Questão - Aplicação: 04/05/2022, 16 hs - Entrega: 16/05/2022, 9 hs

## 3ª Questão (3,0 pontos)

Empregando-se o Método dos Deslocamentos e com o auxílio do Ftool, obter os diagramas de esforços normais (axiais), esforços cortantes, e momentos fletores para o pórtico plano mostrado abaixo. Alguns passos da solução devem ser mostrados, conforme os itens indicados na próxima página.

Todas as barras têm material com módulo de elasticidade  $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$  e seção transversal com área  $A = 0.0012 \text{ m}^2$  e momento de inércia  $I = 0.00036 \text{ m}^4$ . Considera-se deformações axiais e por flexão e despreza-se deformações por cisalhamento.

As barras e as deslocabilidades globais ( $D_i$ ) do modelo estrutural estão numeradas conforme indica a figura ao lado (números das barras indicados por círculos).



Consulte pelo seu número de matrícula os dados do seu modelo na tabela fornecida.

Matrícula	$a$ [m]	$b$ [m]	$c$ [m]	$q_1$ [kN/m]	$q_2$ [kN/m]	$q_3$ [kN/m]
1711629	3	3	6	6	10	10
1712109	4	4	5	8	8	8
1720329	5	5	4	10	6	6
1812132	6	6	3	12	4	4
1820449	3	4	5	8	10	8
1820493	4	5	4	10	8	6
1820664	5	6	3	12	6	4
1820705	6	3	6	6	4	10
1820809	3	5	4	10	10	6
1911308	4	6	3	12	8	4
1912968	6	4	5	8	4	8
2111170	4	3	6	6	8	10

## Leia com atenção as instruções abaixo e os enunciados dos itens da questão.

A solução da 3ª Questão do grau G2 deve ser entregue na página da disciplina no Moodle/CCEAD em um arquivo em formato PDF com o seguinte nome: **ENG1204-221-G2-Q3-matricula.pdf**, em que **matricula** é o número de matrícula da aluna ou do aluno. Não serão aceitas respostas após 09 hs do dia 16/05/2022.

As soluções podem ser feitas à mão em papel e digitalizadas, criadas digitalmente através de algum editor de texto, ou por uma combinação de trechos e desenhos feitos à mão e digitalizados com trechos editados digitalmente.

Além do relatório, deverá ser entregue um vídeo gravado, com imagem e áudio do próprio aluno, com uma explicação sucinta sobre a solução adotada. O arquivo do vídeo deve ter o seguinte nome **ENG1204-221-G2-Q3-matricula.EXT**, em que **EXT** é a extensão do nome do arquivo de acordo com o formato do vídeo.

### Opções de configuração no Ftool:

Unidades gerais adotadas: [kN-m] (configure utilizando a opção *Units & Number Formatting...* do menu *Options*).

Unidade para distâncias: [m]; número de casas decimais para distâncias: 2.

Unidade para forças: [kN]; número de casas decimais para forças: 2.

Unidade para momentos: [kNm]; número de casas decimais para momentos: 2.

Unidade para forças distribuídas: [kN/m]; número de casas decimais para forças distribuídas: 0 (nenhuma casa decimal).

Valor e unidade do módulo de elasticidade do material (*Generic Isotropic*) para todas as barras:  $E = 2 \times 10^8$  kN/m<sup>2</sup> (2.0e+08 kN/m<sup>2</sup>). Os demais parâmetros de material não são utilizados nesta solução. Deixar os valores *default*.

Parâmetros de seção transversal (*Generic/Integral Properties*) para todas as barras:

Valor e unidade da área da seção transversal:  $A = 0.0012$  m<sup>2</sup>.

Valor e unidade do momento de inércia da seção transversal:  $I = 0.00036$  m<sup>4</sup>.

Os demais parâmetros de seção transversal não são utilizados nesta solução. Deixar os valores *default* nulos.

Todas as barras dos modelos estruturais são consideradas com deformação por flexão, com deformação axial e sem deformação por cisalhamento (efeito cortante). Para configurar isso no Ftool, no menu *Deformation Constraints* selecione *Flexible Member*, deixe a opção *Axial Deformation* selecionada e deixe a opção *Shear Deformation* NÃO selecionada. Aplique isso para todas as barras.

### Pede-se:

#### Item (3.a) – Diagramas de esforços internos (0,5 ponto)

Mostre os diagramas de esforços normais, esforços cortantes e momentos fletores utilizando as unidades e a precisão numérica (número de casas decimais) indicadas acima.

#### Item (3.b) – Matriz de rigidez local no sistema global (0,5 ponto)

Mostre as expressões dos coeficientes de rigidez da matriz de rigidez local  $[k]$  da barra 3 **no sistema global de eixos** em função do comprimento  $d$  da barra, do módulo de elasticidade  $E$  do material, da área  $A$  da seção transversal e do momento de inércia  $I$  da seção transversal. Calcule numericamente os coeficientes de rigidez locais no sistema global e mostre os valores com sinal e unidades. Utilize uma casa decimal para os coeficientes de rigidez. Você pode verificar os valores comparando com resultados do Ftool para um modelo com a barra 3 isolada.

#### Item (3.c) – Coeficientes de rigidez global (0,5 ponto)

Mostre as expressões dos coeficientes de rigidez global  $K_{22}$  e  $K_{32}$  em função dos comprimentos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , do módulo de elasticidade  $E$ , da área  $A$  da seção transversal e do momento de inércia  $I$  da seção transversal. Calcule numericamente esses coeficientes de rigidez globais e mostre os valores com sinal e unidades. Utilize uma casa decimal para os coeficientes de rigidez. Você pode verificar os valores comparando com resultados do Ftool.

#### Item (3.d) – Esforços internos finais nas extremidades de barra (1,5 pontos)

Calcule os esforços internos nas extremidades da barra 5 e compare com os resultados obtidos para esta barra pelo Ftool. Os esforços internos devem ser calculados superpondo as reações de engastamento locais provocadas pelo carregamento na barra – caso (0) – com os esforços provocados pelos deslocamentos e rotações dos nós da barra. Nesse cálculo, os deslocamentos e rotações dos nós da barra devem ser obtidos da análise pelo Ftool. Como referência, consulte o documento **ENG1204-EsforcocosFinaisEmBarras.pdf** fornecido junto com o enunciado da questão.

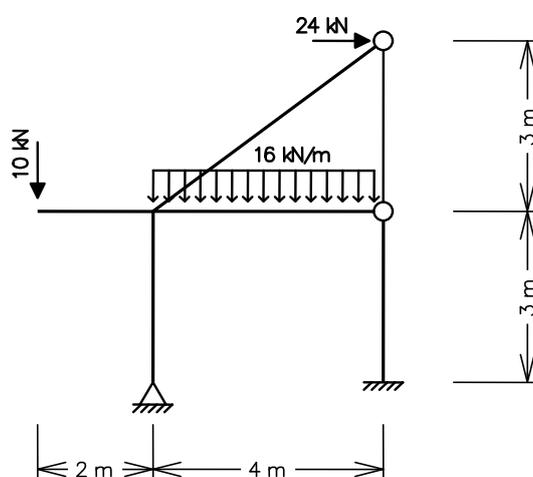
# ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 1º Semestre - 2022

## Grau G2 - 4ª Questão - 23/05/2022, 9 hs às 10:45 hs

### 4ª Questão (3,5 pontos)

Empregando-se o Método dos Deslocamentos, obter o diagrama de momentos fletores para o pórtico plano mostrado abaixo com barras inextensíveis. Todos os passos da solução devem ser mostrados.

Desprezar deformações axiais e deformações por cisalhamento. Considera-se apenas deformações por flexão. Todas as barras têm material com módulo de elasticidade  $E = 1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$  e seção transversal com momento de inércia  $I = 0.00012 \text{ m}^4$ . A área da seção transversal não é utilizada porque são barras inextensíveis.



### Itens da questão

#### Item (a) - Identificação das deslocabilidades e Sistema Hipergeométrico (não vale ponto)

Indique em uma figura as deslocabilidades do modelo estrutural explorando ao máximo os procedimentos adotados para redução do número de deslocabilidades: (i) consideração de trechos em balanço, (ii) consideração de barras inextensíveis, e (iii) consideração de articulações. Mostre o Sistema Hipergeométrico (SH) correspondente em uma figura, com os apoios fictícios numerados de acordo com a numeração das deslocabilidades.

#### Item (b) - Caso básico (0) (1,0 ponto)

Para o SH do item (a), aplique o carregamento externo. Isto corresponde ao caso (0) do Método dos Deslocamentos. Em uma figura, indique os termos de carga  $\beta_{i0}$ . Mostre os valores dos termos de carga com unidades e sinais, e indique os procedimentos adotados para calcular esses termos. Indique os valores dos momentos fletores nas extremidades das barras do modelo utilizando a convenção de sinais do Método dos Deslocamentos.

#### Item (c) - Casos básicos que isolam as deslocabilidades (2,0 pontos)

Imponha ao SH, alternadamente, deslocamentos ou rotações prescritas com valores unitários nos nós onde os apoios fictícios foram inseridos na criação do SH. Isso deve gerar um caso de sollicitação para cada deslocabilidade imposta independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos básicos ( $j$ ) do Método dos Deslocamentos, onde  $j$  é o número de uma des-

locabilidade. Para cada caso básico, mostre a configuração deformada da estrutura para a deslocabilidade unitária imposta, indicando os coeficientes de rigidez globais  $K_{ij}$ . Mostre os valores dos coeficientes de rigidez globais de cada caso básico com unidades e sinais, e indique os procedimentos adotados para calcular esses coeficientes. Para cada caso básico, indique os valores dos momentos fletores nas extremidades das barras do modelo utilizando a convenção de sinais do Método dos Deslocamentos.

**Item (d)** – Sistema de equações de equilíbrio (não vale ponto)

Com base nos resultados dos itens (b) e (c), monte o sistema de equações de equilíbrio que resulta da solução do pórtico original pelo Método dos Deslocamentos. Resolva esse sistema e obtenha os valores das deslocabilidades. Os valores das deslocabilidades podem ser indicados em função do inverso da rigidez à flexão ( $1/EI$ ) ou numericamente com unidades.

**Item (e)** – Obtenção do diagrama de momentos fletores finais (0,5 ponto)

Através da superposição dos momentos fletores dos casos básicos dos itens (b) e (c), ponderados pelos valores das deslocabilidades obtidos no item (d), indique os valores dos momentos fletores finais nas extremidades das barras do modelo utilizando a convenção de sinais do Método dos Deslocamentos. Mostre o diagrama de momentos fletores finais desenhado na forma convencional (ordenadas do diagrama traçadas do lado da fibra tracionada das barras).

Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = \frac{bf - de}{ad - bc} \\ D_2 = \frac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

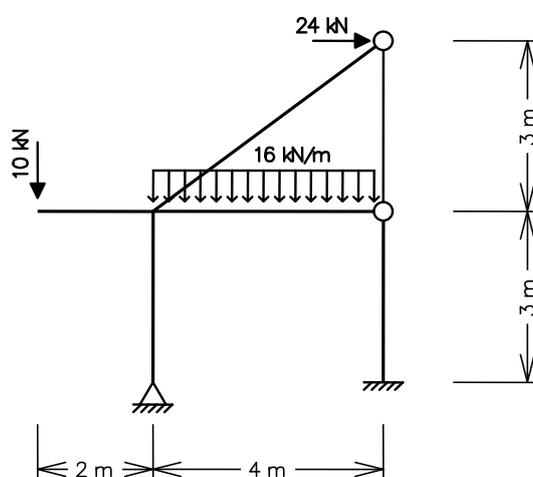
# ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 1º Semestre - 2022

## Grau G2 - 4ª Questão - 23/05/2022, 9 hs às 10:45 hs

### 4ª Questão (3,5 pontos)

Empregando-se o Método dos Deslocamentos, obter o diagrama de momentos fletores para o pórtico plano mostrado abaixo com barras inextensíveis. Todos os passos da solução devem ser mostrados.

Desprezar deformações axiais e deformações por cisalhamento. Considera-se apenas deformações por flexão. Todas as barras têm material com módulo de elasticidade  $E = 1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$  e seção transversal com momento de inércia  $I = 0.00012 \text{ m}^4$ . A área da seção transversal não é utilizada porque são barras inextensíveis.



### Itens da questão

#### Item (a) - Identificação das deslocabilidades e Sistema Hipergeométrico (não vale ponto)

Indique em uma figura as deslocabilidades do modelo estrutural explorando ao máximo os procedimentos adotados para redução do número de deslocabilidades: (i) consideração de trechos em balanço, (ii) consideração de barras inextensíveis, e (iii) consideração de articulações. Mostre o Sistema Hipergeométrico (SH) correspondente em uma figura, com os apoios fictícios numerados de acordo com a numeração das deslocabilidades.

#### Item (b) - Caso básico (0) (1,0 ponto)

Para o SH do item (a), aplique o carregamento externo. Isto corresponde ao caso (0) do Método dos Deslocamentos. Em uma figura, indique os termos de carga  $\beta_{i0}$ . Mostre os valores dos termos de carga com unidades e sinais, e indique os procedimentos adotados para calcular esses termos. Indique os valores dos momentos fletores nas extremidades das barras do modelo utilizando a convenção de sinais do Método dos Deslocamentos.

#### Item (c) - Casos básicos que isolam as deslocabilidades (2,0 pontos)

Imponha ao SH, alternadamente, deslocamentos ou rotações prescritas com valores unitários nos nós onde os apoios fictícios foram inseridos na criação do SH. Isso deve gerar um caso de sollicitação para cada deslocabilidade imposta independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos básicos ( $j$ ) do Método dos Deslocamentos, onde  $j$  é o número de uma des-

locabilidade. Para cada caso básico, mostre a configuração deformada da estrutura para a deslocabilidade unitária imposta, indicando os coeficientes de rigidez globais  $K_{ij}$ . Mostre os valores dos coeficientes de rigidez globais de cada caso básico com unidades e sinais, e indique os procedimentos adotados para calcular esses coeficientes. Para cada caso básico, indique os valores dos momentos fletores nas extremidades das barras do modelo utilizando a convenção de sinais do Método dos Deslocamentos.

**Item (d)** – Sistema de equações de equilíbrio (não vale ponto)

Com base nos resultados dos itens (b) e (c), monte o sistema de equações de equilíbrio que resulta da solução do pórtico original pelo Método dos Deslocamentos. Resolva esse sistema e obtenha os valores das deslocabilidades. Os valores das deslocabilidades podem ser indicados em função do inverso da rigidez à flexão ( $1/EI$ ) ou numericamente com unidades.

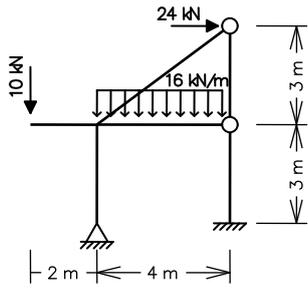
**Item (e)** – Obtenção do diagrama de momentos fletores finais (0,5 ponto)

Através da superposição dos momentos fletores dos casos básicos dos itens (b) e (c), ponderados pelos valores das deslocabilidades obtidos no item (d), indique os valores dos momentos fletores finais nas extremidades das barras do modelo utilizando a convenção de sinais do Método dos Deslocamentos. Mostre o diagrama de momentos fletores finais desenhado na forma convencional (ordenadas do diagrama traçadas do lado da fibra tracionada das barras).

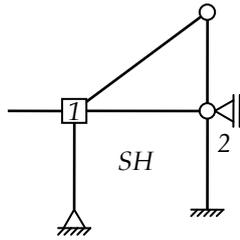
Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = \frac{bf - de}{ad - bc} \\ D_2 = \frac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

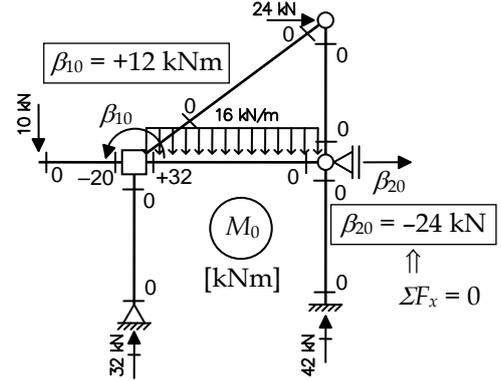
ENG 1204 – Análise de Estruturas II – 2022.1 – Grau G2 – 4ª Questão



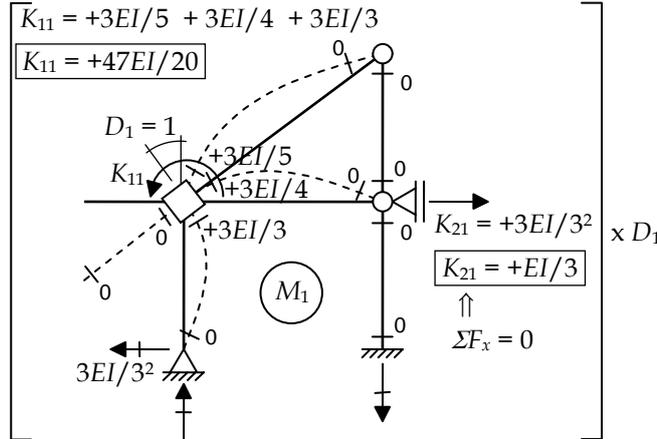
Sistema Hipergeométrico



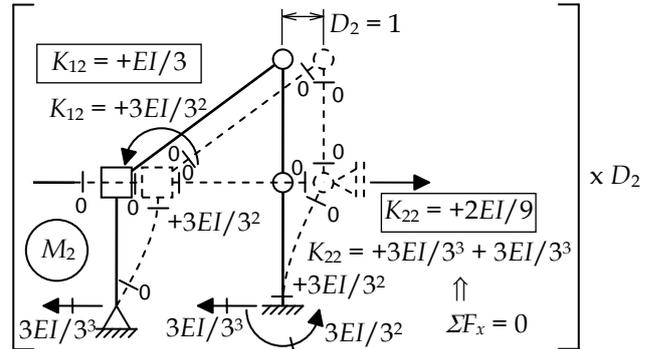
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SH



Caso (1) – Deslocabilidade  $D_1$  isolada no SH



Caso (2) – Deslocabilidade  $D_2$  isolada no SH



Equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} \beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 = 0 \\ \beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} +12 \\ -24 \end{bmatrix} + EI \cdot \begin{bmatrix} +47/20 & +1/3 \\ +1/3 & +2/9 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = -\frac{25.9459}{EI} \\ D_2 = +\frac{146.919}{EI} \end{cases}$$

Momentos Fletores Finais:

$$M = M_0 + M_1 \cdot D_1 + M_2 \cdot D_2$$

