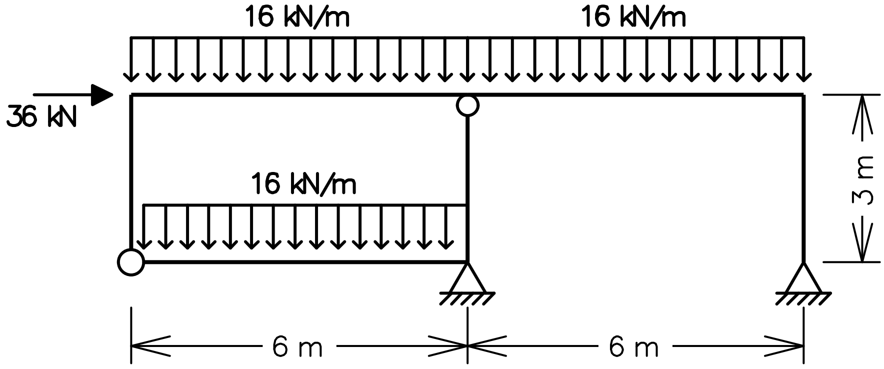
ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2017

Primeira Prova – Parte 1 – 10/04/2017 – Duração: 1:45 hs – Sem Consulta

1ª Questão (5,5 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático abaixo. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão *EI* = 3.6x10⁵ kNm².



Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{bf - de}{ad - bc} \\ X_2 = \dfrac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

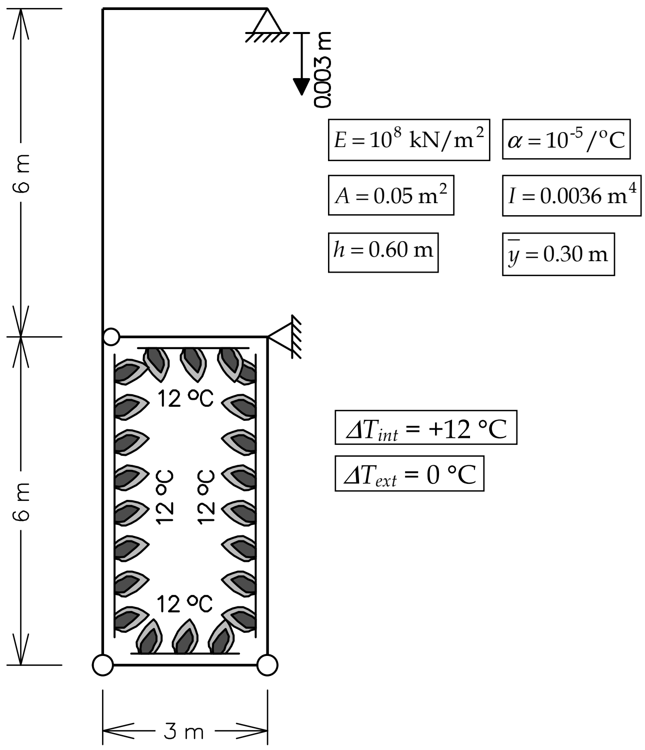
ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2017

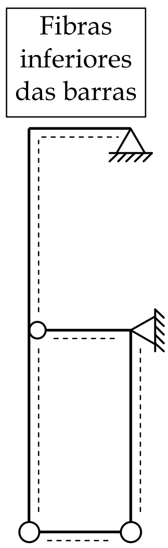
Primeira Prova – Parte 2 – 12/04/2017 – Duração: 1:45 hs – Sem Consulta

2ª Questão (3,5 pontos)

Para o pórtico mostrado abaixo, pede-se o diagrama de momentos fletores utilizando o Método das Forças. **Considere deformação axial e deformação por flexão das barras.** O material tem módulo de elasticidade $E = 10^8$ kN/m² e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ /°C. As barras do pórtico têm uma seção transversal com área A = 0.05 m², momento de inércia I = 0.0036 m⁴, altura h = 0.60 m e centro de gravidade no meio de altura. As seguintes solicitações atuam no pórtico concomitantemente:

- Aquecimento no interior do compartimento inferior do pórtico de ΔT_{int} = +12 °C (nas fibras interiores das barras do anel).
- Recalque vertical, para baixo, de 3 mm (0.003 m) do apoio superior.





Sabe-se:

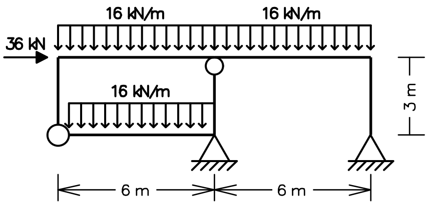
(i) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$du^T = \alpha \Delta T_{CG}\, dx$
sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

(ii) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é

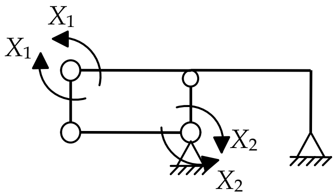
$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$

sendo ΔT_i a variação de temperatura da fibra inferior da barra e ΔT_s a variação de temperatura da fibra superior (fibras inferiores das barras indicadas na figura).

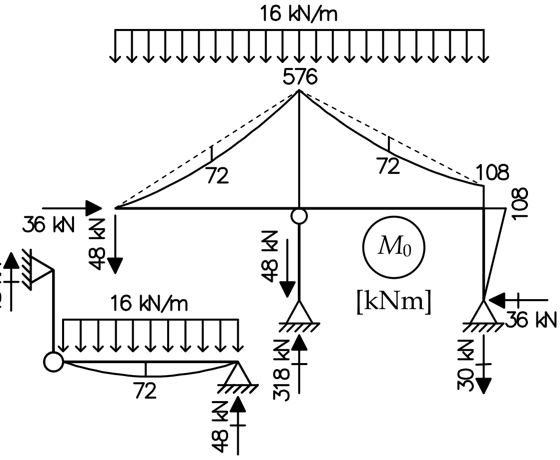
1ª Questão



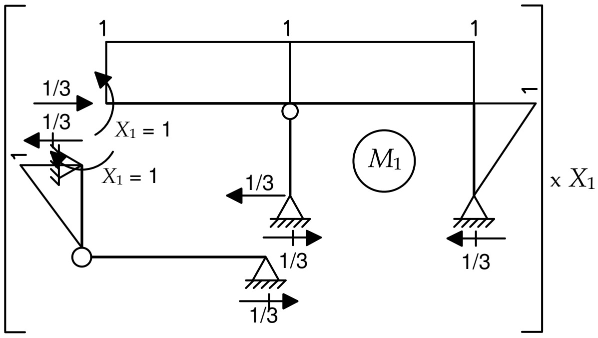
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos



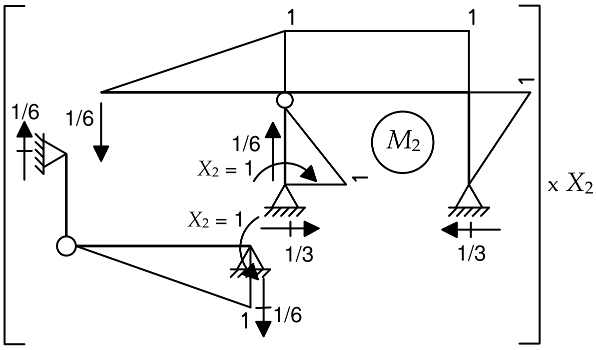
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases}\delta_{10}+\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=0\\ \delta_{20}+\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}+3312\\+3024\end{Bmatrix}+\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}+14 & +10\\+10 & +12\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}X_1=-139.8\text{ kNm}\\X_2=-135.5\text{ kNm}\end{cases}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 576\cdot 6-\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 576\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 108\cdot 6-\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 108\cdot 3\right]=+\frac{3312}{EI}$$

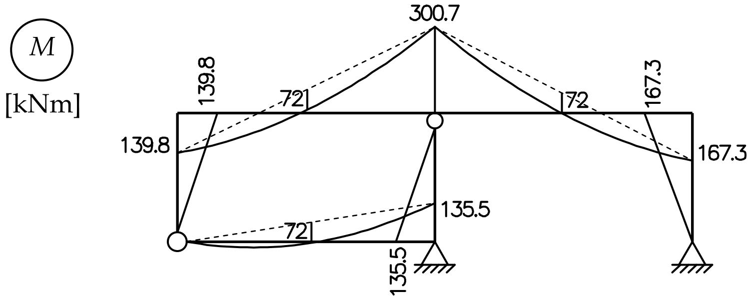
$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 576\cdot 6-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 576\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 108\cdot 6-\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 108\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 6\right]=+\frac{3024}{EI}$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\left[2\cdot(1\cdot 1\cdot 6)+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)\right]=+\frac{14}{EI} \qquad \delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 6+1\cdot 1\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right]=+\frac{10}{EI}$$

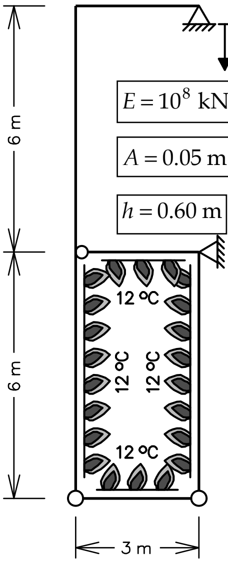
$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right)+1\cdot 1\cdot 6+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)\right]=+\frac{12}{EI}$$

Momentos Fletores Finais:

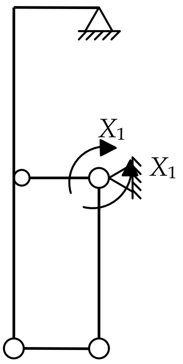
$$M=M_0+M_1\cdot X_1+M_2\cdot X_2$$



2ª Questão



Sistema Principal (SP) e Hiperestático



Caso (0) – Solicitações externas isolada no SP

O diagrama de momentos fletores do caso (0) é nulo ($M_0 = 0$), pois o SP é isostático e variação de temperatura e recalque de apoio não provocam esforços internos em modelos estruturais isostáticos. O termo de carga δ_{10} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada a X_1, introduzida na criação do SP, provocada pela variação de temperatura (δ_{10}^T) e pelo recalque (δ_{10}^ρ), no caso (0):

$$\delta_{10} = \delta_{10}^T + \delta_{10}^\rho$$

$$\delta_{10}^T = \int_{anel} N_1 du_0^T + \int_{anel} M_1 d\theta_0^T$$

$$du_0^T = \alpha \cdot \Delta T_{GC} \cdot dx = \alpha \cdot (+6) \cdot dx$$

$$d\theta_0^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \pm \frac{\alpha \cdot (12)}{0.60} dx = \pm \alpha \cdot 20 \cdot dx$$

$d\theta_0^T$ é positivo quando a fibra inferior tem um aumento relativo de temperatura e negativo quando a fibra superior tem um aumento relativo de temperatura.

$$1 \cdot \delta_{10}^\rho + V_{A1} \cdot \rho_{A0} = 0 \;\Rightarrow\; \delta_{10}^\rho = -V_{A1} \cdot \rho_{A0}\text{, sendo } \rho_{A0} = -0.003 \text{ m}$$

Equação de compatibilidade:

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

$$(-150 - 100) \cdot 10^{-5} + 3.35 \cdot 10^{-5} \cdot X_1 = 0$$

$$\boxed{X_1 = +74.6 \text{ kNm}}$$

$$\delta_{10}^T = \alpha \cdot 6 \cdot \left[-\frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 3 \right] + \alpha \cdot 20 \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \right]$$

$$\boxed{\delta_{10}^T = -150 \cdot 10^{-5} \text{ rad}}$$

$$\delta_{10}^\rho = -V_{A1} \cdot \rho_{A0} = -\left[(-1/3) \cdot (-0.003) \right]$$

$$\boxed{\delta_{10}^\rho = -100 \times 10^{-5} \text{ rad}}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{(N_1)^2}{EA} dx + \int \frac{(M_1)^2}{EI} dx$$

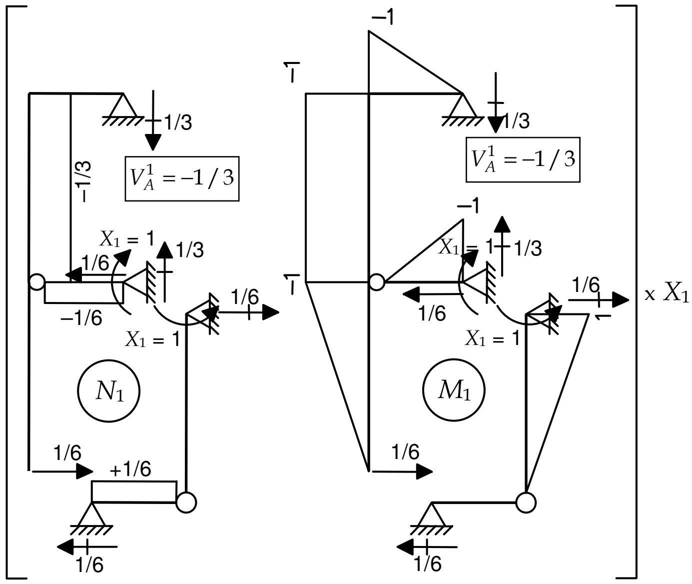
(considerando deformação axial e por flexão)

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA} \cdot \left[\begin{matrix} \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 6 + \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 3 + \\ \left(+\frac{1}{6}\right) \cdot \left(+\frac{1}{6}\right) \cdot 3 \end{matrix} \right] + \frac{1}{EI} \cdot \left[+2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right) + 1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \right) \right]$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA} \cdot \left[\frac{5}{6} \right] + \frac{1}{EI} \cdot [12]$$

$$\boxed{\delta_{11} + 3.35 \times 10^{-5} \text{ rad/kNm}}$$

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Momentos Fletores Finais:

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$$

em que $M_0 = 0$.