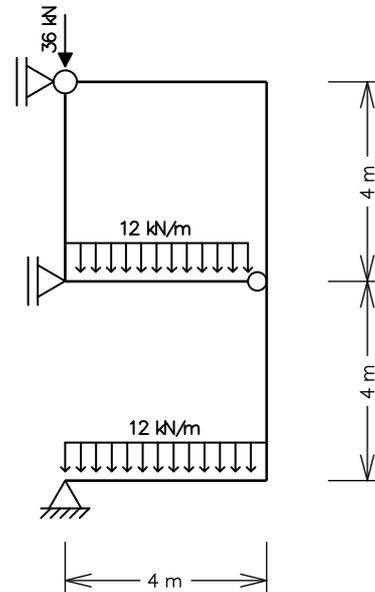


ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 1º Semestre - 2018

Primeira Prova - Datas: 04/04/2018 - 09/04/2018 - Sem Consulta

1ª Questão (5,5 pontos)

Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 1.5 \times 10^5 \text{ kNm}^2$.

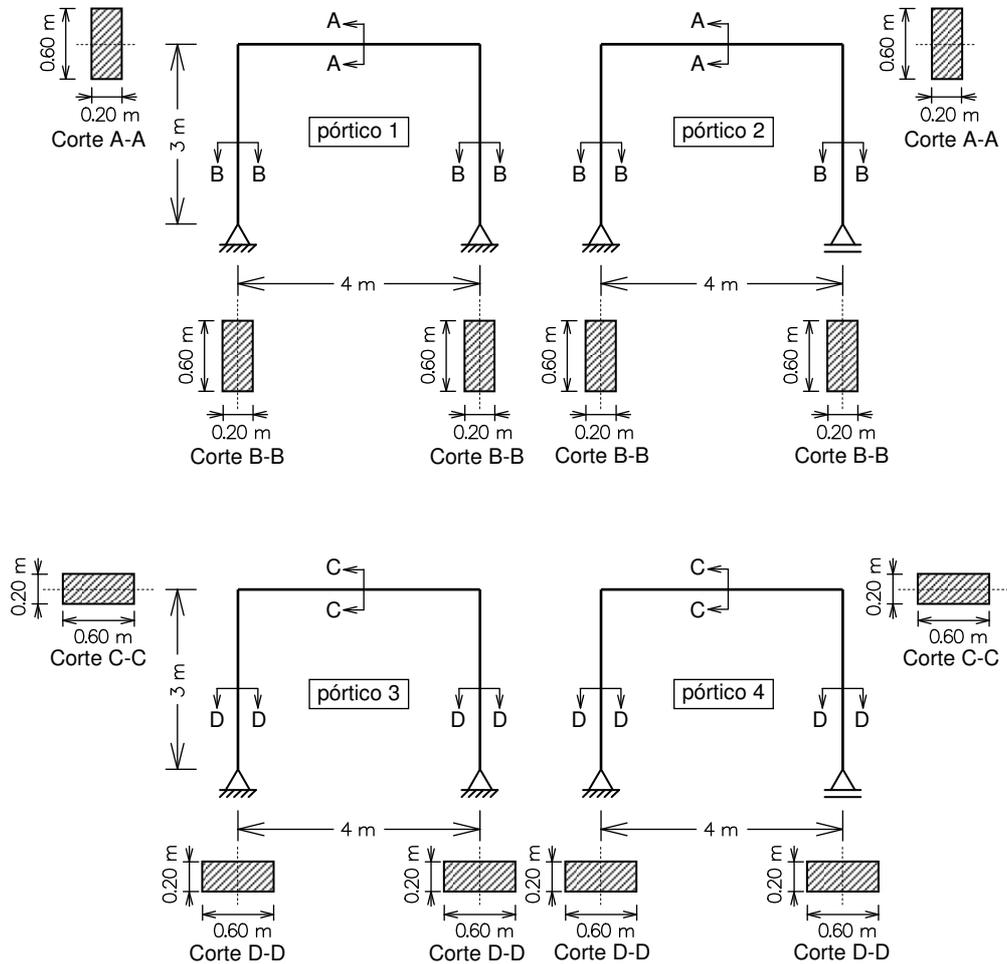


Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{bf - de}{ad - bc} \\ X_2 = \frac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

2ª Questão (3,5 pontos)

Na figura a seguir, são mostrados quatro pórticos com comprimentos iguais para vigas e pilares. As seções transversais das vigas e pilares são retângulos idênticos, porém com orientações distintas. Nos pórticos 1 e 2, as vigas têm seção transversal orientada no sentido de maior inércia e os pilares têm seção transversal orientada no sentido de menor inércia. Por outro lado, nos pórticos 3 e 4, as vigas têm seção transversal orientada no sentido de menor inércia e os pilares têm seção transversal orientada no sentido de maior inércia.



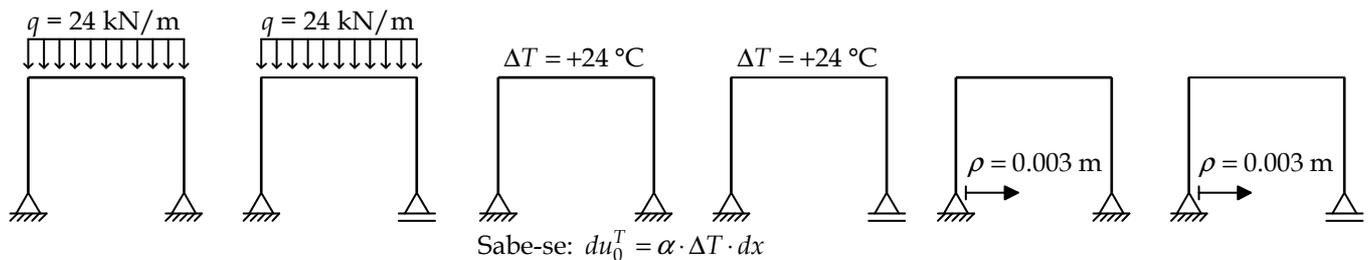
O material utilizado nos pórticos tem módulo de elasticidade $E = 10^{18} \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$. Despreze deformação por cisalhamento.

Considere as seguintes solicitações externas:

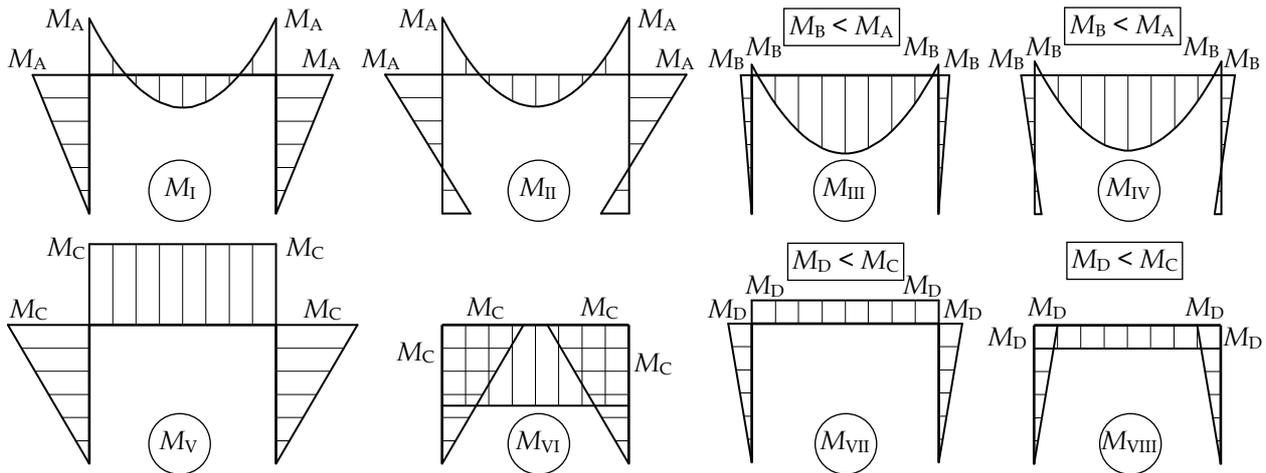
(q) Força uniformemente distribuída atuando na viga

(T) Variação uniforme de temperatura na viga

(ρ) Recalque horizontal no apoio da esquerda



Considere os seguintes diagramas de momentos fletores para os pórticos:



Pede-se:

2.a Com respeito ao diagrama de momentos fletores para a solicitação externa (q) – **força uniformemente distribuída atuando na viga** –, assinale a **única afirmativa correta** (1,5 pontos):

- (A) M_I é o diagrama do pórtico 1; nenhum dos diagramas é do pórtico 2; M_{III} é o diagrama do pórtico 3; e nenhum dos diagramas é do pórtico 4.
- (B) M_{II} é o diagrama do pórtico 1; nenhum dos diagramas é do pórtico 2; M_{IV} é o diagrama do pórtico 3; e nenhum dos diagramas é do pórtico 4.
- (C) M_{III} é o diagrama do pórtico 1; M_{IV} é o diagrama do pórtico 2; M_I é o diagrama do pórtico 3; e M_{II} é o diagrama do pórtico 4.
- (D) M_{III} é o diagrama do pórtico 1; nenhum dos diagramas é do pórtico 2; M_I é o diagrama do pórtico 3; e nenhum dos diagramas é do pórtico 4.
- (E) M_{VII} é o diagrama do pórtico 1; nenhum dos diagramas é do pórtico 2; M_V é o diagrama do pórtico 3; e nenhum dos diagramas é do pórtico 4.

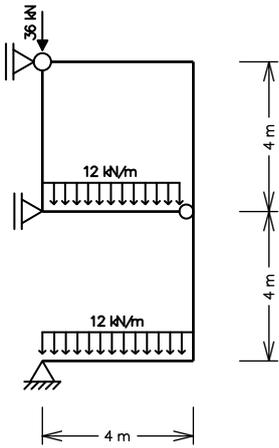
2.b Com respeito ao diagrama de momentos fletores para a solicitação externa (T) – **variação uniforme de temperatura na viga** –, assinale a **única afirmativa correta** (1,0 ponto):

- (A) Nenhum dos diagramas é do pórtico 1; M_V é o diagrama do pórtico 2; nenhum dos diagramas é do pórtico 3; e M_{VII} é o diagrama do pórtico 4.
- (B) M_V é o diagrama do pórtico 1; nenhum dos diagramas é do pórtico 2; M_{VII} é o diagrama do pórtico 3; e nenhum dos diagramas é do pórtico 4.
- (C) M_I é o diagrama do pórtico 1; nenhum dos diagramas é do pórtico 2; M_{III} é o diagrama do pórtico 3; e nenhum dos diagramas é do pórtico 4.
- (D) Nenhum dos diagramas é do pórtico 1; M_{VI} é o diagrama do pórtico 2; nenhum dos diagramas é do pórtico 3; e M_{VIII} é o diagrama do pórtico 4.
- (E) M_{VII} é o diagrama do pórtico 1; nenhum dos diagramas é do pórtico 2; M_V é o diagrama do pórtico 3; e nenhum dos diagramas é do pórtico 4.

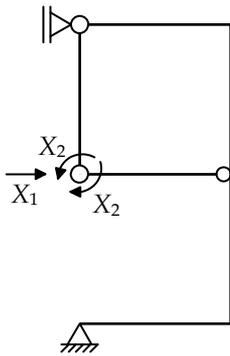
2.c Com respeito ao diagrama de momentos fletores para a solicitação externa (ρ) – **recalque horizontal no apoio da esquerda** –, assinale a **única afirmativa correta** (1,0 ponto):

- (A) Nenhum dos diagramas é do pórtico 1; M_V é o diagrama do pórtico 2; nenhum dos diagramas é do pórtico 3; e M_{VII} é o diagrama do pórtico 4.
- (B) M_{VII} é o diagrama do pórtico 1; nenhum dos diagramas é do pórtico 2; M_V é o diagrama do pórtico 3; e nenhum dos diagramas é do pórtico 4.
- (C) M_I é o diagrama do pórtico 1; nenhum dos diagramas é do pórtico 2; M_{III} é o diagrama do pórtico 3; e nenhum dos diagramas é do pórtico 4.
- (D) M_{III} é o diagrama do pórtico 1; nenhum dos diagramas é do pórtico 2; M_I é o diagrama do pórtico 3; e nenhum dos diagramas é do pórtico 4.
- (E) M_V é o diagrama do pórtico 1; nenhum dos diagramas é do pórtico 2; M_{VII} é o diagrama do pórtico 3; e nenhum dos diagramas é do pórtico 4.

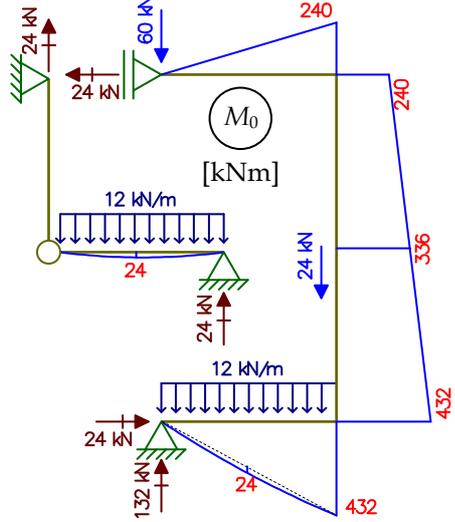
1ª Questão



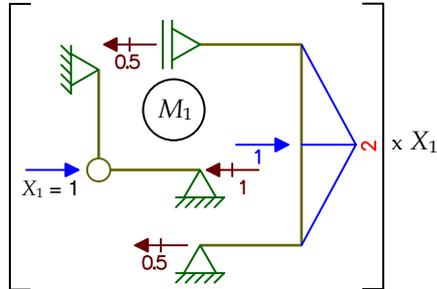
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos



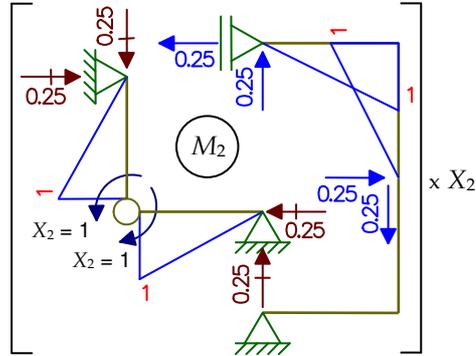
Caso (0) - Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) - Hiperestático X1 isolado no SP



Caso (2) - Hiperestático X2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} +2688 \\ -832 \end{bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} +32/3 & -4/3 \\ -4/3 & +16/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -240 \text{ kNm} \\ X_2 = +96 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 240 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 336 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 336 \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 432 \cdot 4 \right] = +\frac{2688}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 240 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 240 \cdot 4 - \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 336 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 24 \cdot 4 \right] = -\frac{832}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \right) \right] = +\frac{32}{3EI}$$

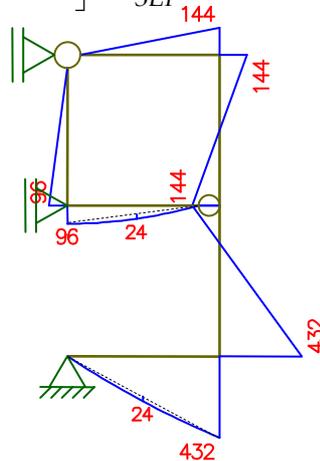
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \right] = -\frac{4}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \right) \right] = +\frac{16}{3EI}$$

Momentos Fletores Finais:

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$

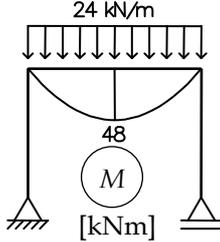
(M) [kNm]



2ª Questão

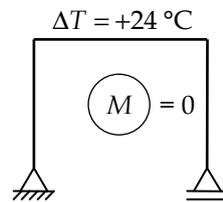
Pórtico 2 e 4 - Isostáticos

(q) Força uniformemente distribuída atuando na viga



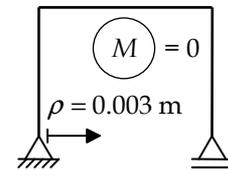
Pórtico 2 e 4 - Isostáticos

(T) Variação uniforme de temperatura na viga



Pórtico 2 e 4 - Isostáticos

(ρ) Recalque horizontal no apoio da esquerda



Pórtico 1 e 3 - Hiperestáticos

$$A_{\text{viga}} = A_{\text{pilar}} = 0.20 \cdot 0.60 = 0.12 \text{ m}^2$$

Pórtico 1

$$I_{\text{viga}} = 0.20 \cdot 0.60^3 / 12 = 0.0036 \text{ m}^4$$

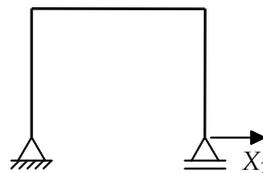
$$I_{\text{pilar}} = 0.60 \cdot 0.20^3 / 12 = 0.0004 \text{ m}^4$$

Pórtico 3

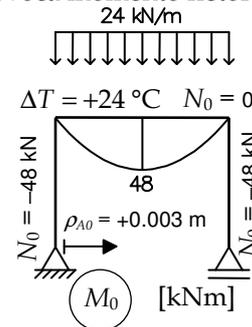
$$I_{\text{viga}} = 0.60 \cdot 0.20^3 / 12 = 0.0004 \text{ m}^4$$

$$I_{\text{pilar}} = 0.20 \cdot 0.60^3 / 12 = 0.0036 \text{ m}^4$$

Sistema Principal e Hiperestático (g = 1)

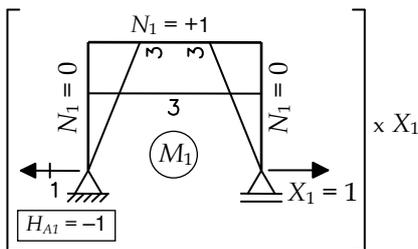


Caso (0) - somente (q) - força uniformemente distribuída - provoca momento fletor



Equação de compatibilidade $\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$

Caso (1) - Hiperestático X_1 isolado no SP



Coefficiente de flexibilidade:

$$\delta_{11} = \int_{\text{pórtico}} \frac{(M_1)^2}{EI} dx + \int_{\text{pórtico}} \frac{(N_1)^2}{EA} dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_{\text{viga}}} [3 \cdot 3 \cdot 4] + \frac{1}{EI_{\text{pilar}}} \left[2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \right) \right] + \frac{1}{EA} [1 \cdot 1 \cdot 4]$$

Pórtico 1

$$\delta_{11} = + \frac{165.1}{3} \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{kN}}$$

Pórtico 3

$$\delta_{11} = + \frac{285.1}{3} \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{kN}}$$

Hiperestáticos:

(q) Força uniformemente distribuída atuando na viga

Pórtico 1

$$X_1 = -\delta_{10}^q / \delta_{11} = -1.938 \text{ kN}$$

Pórtico 3

$$X_1 = -10.102 \text{ kN}$$

Termos de carga:

$$\delta_{10}^q = \int_{\text{pórtico}} \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \int_{\text{pórtico}} \frac{N_1 N_0}{EA} dx$$

$$\delta_{10}^T = \int_{\text{viga}} M_1 d\theta_0^T + \int_{\text{viga}} N_1 du_0^T = 0 + \int_{\text{viga}} N_1 du_0^T$$

$$1 \cdot \delta_{10}^p + H_{A1} \cdot \rho_{A0} = 0 \Rightarrow \delta_{10}^p = -H_{A1} \cdot \rho_{A0}$$

$$\delta_{10}^q = \frac{1}{EI_{\text{viga}}} \left[\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 48 \cdot 4 \right] + \frac{1}{EA} [0]$$

Pórtico 1

$$\delta_{10}^q = + \frac{320}{3} \times 10^{-5} \text{ m}$$

Pórtico 3

$$\delta_{10}^q = +960 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Pórtico 1 e Pórtico 3

$$\delta_{10}^T = \int_0^4 N_1 du_0^T = +\alpha \cdot 24 \cdot \int_0^4 N_1 dx$$

$$\delta_{10}^T = +\alpha \cdot 24 \cdot 4 = +96 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$\delta_{10}^p = -H_{A1} \cdot \rho_{A0} = -[(-1) \cdot (+0.003)]$$

$$\delta_{10}^p = +300 \times 10^{-5} \text{ m}$$

(T) Variação uniforme de temperatura na viga

Pórtico 1

$$X_1 = -\delta_{10}^T / \delta_{11} = -1.744 \text{ kN}$$

Pórtico 3

$$X_1 = -1.010 \text{ kN}$$

(ρ) Recalque horizontal no apoio da esquerda

Pórtico 1

$$X_1 = -\delta_{10}^p / \delta_{11} = -5.451 \text{ kN}$$

Pórtico 3

$$X_1 = -3.157 \text{ kN}$$

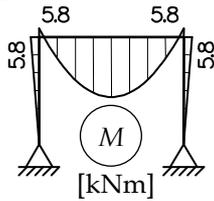
Momentos fletores finais: $M = M_0 + M_1 X_1$

(q) Força uniformemente distribuída atuando na viga

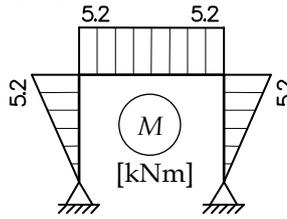
(T) Variação uniforme de temperatura na viga

(ρ) Recalque horizontal no apoio da esquerda

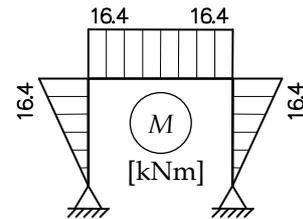
Pórtico 1



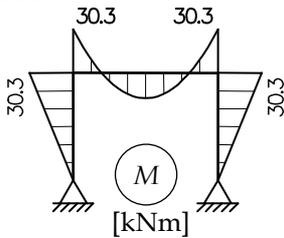
Pórtico 1



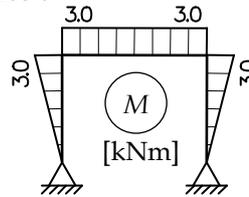
Pórtico 1



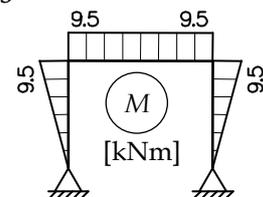
Pórtico 3



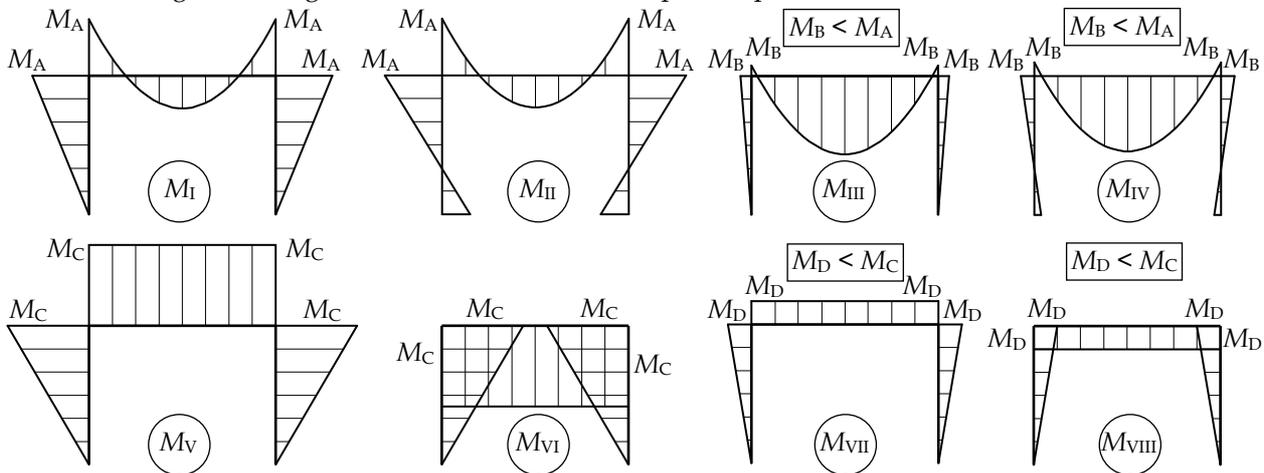
Pórtico 3



Pórtico 3



Considere os seguintes diagramas de momentos fletores para os pórticos:



Respostas:

2.a Com respeito ao diagrama de momentos fletores para a solicitação externa (q) – **força uniformemente distribuída atuando na viga** –, assinale a **única afirmativa correta** (1,5 pontos):

(D) M_{III} é o diagrama do pórtico 1; nenhum dos diagramas é do pórtico 2; M_I é o diagrama do pórtico 3; e nenhum dos diagramas é do pórtico 4.

2.b Com respeito ao diagrama de momentos fletores para a solicitação externa (T) – **variação uniforme de temperatura na viga** –, assinale a **única afirmativa correta** (1,0 ponto):

(B) M_V é o diagrama do pórtico 1; nenhum dos diagramas é do pórtico 2; M_{VII} é o diagrama do pórtico 3; e nenhum dos diagramas é do pórtico 4.

2.c Com respeito ao diagrama de momentos fletores para a solicitação externa (ρ) – **recalque horizontal no apoio da esquerda** –, assinale a **única afirmativa correta** (1,0 ponto):

(E) M_V é o diagrama do pórtico 1; nenhum dos diagramas é do pórtico 2; M_{VII} é o diagrama do pórtico 3; e nenhum dos diagramas é do pórtico 4.