



CEFET/PR - CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO

TECNOLÓGICA DO PARANÁ

DAMEC - DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MECÂNICA

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A ENGENHARIA

INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Fundamentos Teóricos

MARCO ANTÔNIO LUERSEN

Março / 2000

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 – Conceitos Iniciais e Método dos Resíduos Ponderados	3
1.1 Introdução	3
1.2 Conceitos Iniciais	5
1.3 Método dos Resíduos Ponderados	7
1.3.1 Método da Colocação	11
1.3.2 Subdomínio	12
1.3.3 Mínimos Quadrados	12
1.3.4 Colocação dos Mínimos Quadrados	13
1.3.5 Galerkin	13
CAPÍTULO 2 – Elementos Finitos Unidimensionais	21
2.1 Método dos Elementos Finitos de Galerkin	21
2.2 Obtenção da Matriz de Rigidez e Vetor de Carga Globais	30
2.3 Imposição das Condições de Contorno	33
2.4 Resolução do Sistema Algébrico Linear e Determinação dos Deslocamentos Nodais	35
2.5 Cálculo de Deformações e Tensões (Quantidades Derivadas)	37
2.6 Cálculo das Reações	41
2.7 Condução de Calor Unidimensional em Regime Permanente	42
2.8 Formulação de Elementos Finitos Utilizando o Princípio da Mínima Energia Potencial	47
2.9 Método Direto	51
2.10 Obtenção de Funções de Interpolação Unidimensionais C^0	54
2.11 Transformação de Coordenadas para o Elemento de Barra	60
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	65
APÊNDICE	67

CAPÍTULO 1

Conceitos Iniciais e Método dos Resíduos Ponderados

1.1 INTRODUÇÃO

Para a representação de fenômenos físicos, os engenheiros e físicos geralmente estabelecem um sistema de equações diferenciais válidas em certa região (domínio) e impõem nesse sistema condições de contorno e condições iniciais. Até esse estágio, o modelo matemático está completo e, para aplicações práticas, necessita-se “somente” a solução para um conjunto particular de dados numéricos. Aqui surge a maior dificuldade, pois apenas formas muito simples de equações, dentro de contornos triviais, são possíveis de serem resolvidas exatamente através de métodos matemáticos. Equações diferenciais ordinárias, com coeficientes constantes são alguns exemplos para os quais soluções analíticas são possíveis.

Para solucionar tais dificuldades, há a necessidade da utilização de métodos numéricos, obtendo-se assim soluções aproximadas da equação diferencial que se deseja resolver, sujeita a certas condições de contorno e condições iniciais. A idéia básica dos métodos numéricos para solucionar tal classe de problemas é “discretizar” o problema contínuo. Ou seja, o conjunto infinito de números que representam a função ou funções desconhecidas é substituído por um conjunto finito de parâmetros desconhecidos, sendo que esse processo requer alguma forma de aproximação. Os parâmetros desconhecidos são encontrados através de solução algébrica, ou seja, obtém-se um sistema algébrico de equações do tipo

$$[A]\{x\} = \{b\} \tag{1.1}$$

onde $[A]$ é uma matriz quadrada e não-singular, $\{b\}$ é o vetor independente e $\{x\}$ é o vetor que contém os parâmetros desconhecidos da solução aproximada, ou seja, é o vetor solução. Por vezes a matriz $[A]$ pode depender do vetor $\{x\}$, caracterizando um problema não-linear. Ou ainda $[A]$, $\{x\}$ e $\{b\}$ podem ser todos dependentes do tempo, desejando-se a solução não somente para um instante, mas para um determinado intervalo de tempo, necessitando solucionar a equação (1.1) várias, ou inúmeras vezes.

Dentre os métodos numéricos mais conhecidos e utilizados pode-se destacar o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Volumes Finitos, o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno. Os três primeiros métodos são métodos de domínio, isto é, a discretização é ao longo de toda a região. Já o Método dos Elementos de Contorno, como o próprio nome diz, é um método de contorno, necessitando apenas fazer a discretização ao longo do contorno da região de estudo. Outra classe de métodos numéricos que está se destacando são os chamados métodos sem malha (*meshless methods*) onde, contrário ao Método dos Elementos Finitos, não necessita da definição de uma malha, mas somente de pontos ao longo do domínio. Maiores detalhes sobre métodos sem malha podem ser encontrados em Duarte (1995) e Duarte e Oden (1995).

Na engenharia, outras formas de abordar a obtenção de soluções aproximadas são utilizadas, tais como os princípios de equilíbrio, conservação e métodos energéticos. Mas a qualquer uma dessas formas de abordar o problema pode-se sempre também associar uma equação diferencial.

Assim, de uma forma geral, o Método dos Elementos Finitos (MEF) pode ser encarado como um método numérico aproximado, para solucionar equações diferenciais, com precisão aceitável para engenheiros. Seu desenvolvimento inicial foi em aplicações de análise estrutural em aeronaves, utilizando o princípio de equilíbrio de forças e análise matricial. Posteriormente foi aplicado a outros fenômenos, sendo atualmente utilizado na solução de muitos problemas, dentre os quais pode-se citar: análise de tensões, vibrações, acústica, escoamento de fluidos, distribuição de temperatura, campo eletromagnético, injeção de plástico, etc., tanto para modelar fenômenos lineares como não-lineares. Existem inúmeros softwares comerciais no mercado:

- Ansys: análise estrutural linear e não-linear, acústica, eletromagnetismo, escoamento de fluidos, distribuição de temperatura
- Pro-Mechanica: análise estrutural linear e distribuição de temperatura
- Abaqus: análise estrutural linear e não-linear
- Nastran: análise estrutural
- Cosmos: análise estrutural
- Algor: análise estrutural linear e não-linear, análise térmica, escoamento de fluido
- LS-Dyna: conformação mecânica de metais, "crash"
- I-Deas: análise estrutural linear e não-linear, análise térmica, escoamento de fluidos.
- C-Mold: simulação do processo de injeção de plástico
- Mold-flow: simulação do processo de injeção de plástico

1.2 CONCEITOS INICIAIS

No estudo de soluções aproximadas de equações diferenciais, é necessário introduzir alguns conceitos e definições.

Funcional: expressão integral escalar que contém implicitamente as equações diferenciais que descrevem o problema. Na mecânica estrutural, o funcional mais largamente utilizado é a expressão da energia potencial total. Funcionais também são avaliados para problemas de condução de calor, escoamento de fluidos, acústica, etc.

De uma forma genérica, um funcional, no espaço \mathfrak{R}^2 , pode ser escrito da seguinte forma

$$I = \iint F\left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) dx dy \quad (1.2)$$

sendo x e y as variáveis independentes, u e v funções de x e y .

O termo *funcional* indica que I depende não somente de u , v e suas derivadas em um ponto, mas também do seu efeito integrado sobre a região de interesse. Na mecânica

dos sólidos, um exemplo de funcional é a expressão da energia potencial total \mathbf{p} de um corpo elástico, que escrita em notação indicial é dada por

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{W}} \mathbf{s}_{ij} \mathbf{e}_{ij} d\mathbf{W} - \int_{\mathbf{W}} b_i u_i d\mathbf{W} - \int_{\mathbf{G}} t_i u_i d\mathbf{G} \quad (1.3)$$

onde \mathbf{s}_{ij} são as componentes de tensão, \mathbf{e}_{ij} as componentes de deformação, b_i as forças de corpo, t_i as forças de superfície, u_i os deslocamentos, \mathbf{W} o domínio de interesse, e \mathbf{G} o contorno do domínio de interesse.

Cálculo Variacional: parte da matemática que se preocupa em encontrar valores estacionários (extremos) de funcionais. Ou seja, para o funcional I da expressão (1.2) procura-se as funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ de modo que I seja estacionário. As funções u e v que satisfizerem esta condição são também a solução das equações de Euler-Lagrange associadas ao funcional. As equações de Euler-Lagrange representam, em formato de equações diferenciais, o mesmo problema representado, de forma integral, pelo funcional a elas associado. Noções sobre cálculo variacional podem ser encontrados em Dym & Shames (1978), Tauchert (1974), Bassanezi & Ferreira Jr. (1988), entre outros trabalhos.

Princípio Variacional: usa uma expressão integral, chamada funcional, que possui implicitamente as equações diferenciais e as condições de contorno não essenciais de um problema, e nele são aplicados os princípios do cálculo variacional, procurando uma posição estacionária, geralmente um mínimo para o funcional. Frequentemente o funcional é uma forma quadrática. O Princípio da Mínima Energia Potencial é um, dentre os vários princípios utilizados na mecânica. Assim, no sentido clássico, quando se fala em formulação variacional pressupõe-se a minimização de uma forma quadrática.

Utilizando um princípio variacional, o Método dos Elementos Finitos pode ser apresentado como uma generalização do Método de Rayleigh-Ritz. Detalhes sobre o Método de Rayleigh-Ritz podem ser encontrados no livro *Energy Principles in Structural Mechanics* (Tauchert, 1974).

Em outras áreas que não seja a mecânica estrutural, um princípio variacional pode não ser obtido. Isto acontece se a equação diferencial do problema contém derivadas de ordem ímpar, ocorrendo na mecânica dos fluidos, para alguns tipos de escoamento.

Mesmo assim, o Método dos Elementos Finitos pode ser aplicado, utilizando o Método dos Resíduos Ponderados. Tanto o Método de Rayleigh-Ritz como o Método dos Resíduos Ponderados usam expressões integrais que contém as equações diferenciais do problema físico. Ambas as formulações, funcional e residual, são conhecidas como forma *fraca* das equações que governam o problema. A equação diferencial é conhecida como forma *forte*. A forma fraca força as condições de continuidade na média (*integral sense*), ao passo que a forma forte força as condições de continuidade em cada ponto. Note que a solução da forma forte é sempre também solução da forma fraca, ao passo que a afirmação contrária nem sempre é verdadeira. A solução da forma fraca é conhecida também como *solução generalizada*.

1.3 MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

Para se aplicar o Método dos Resíduos Ponderados necessita-se primeiramente saber a equação diferencial que rege o problema físico em questão.

Seja a equação diferencial, que governa um determinado problema físico, com condições especificadas no contorno (problema de valor no contorno)

$$\begin{aligned} Du - f &= 0 && \text{no domínio } W \\ Bu - g &= 0 && \text{no contorno } G \quad (\text{condições de contorno}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde:

u = variável dependente. Por exemplo: deslocamentos em um ponto, temperatura em um ponto, potencial elétrico;

x = variável independente. Por exemplo, coordenadas de um ponto;

f, g = funções de x , constantes ou zero, dependendo do problema;

D, B = operadores diferenciais.

Se o operador diferencial D é de ordem $2m$, define-se dois tipos de condições de contorno, de acordo com a ordem do operador diferencial B . Esta classificação é importante no estudo de soluções de equações diferenciais, pois cada tipo de condição de contorno é abordada de uma forma.

Condições de contorno essenciais (ou condições de contorno de Dirichlet): condições de contorno que envolvem derivadas de ordem 0 a $m-1$. Em análise estrutural as condições de contorno essenciais também são conhecidas como condições de contorno *geométricas* ou *cinemáticas*.

Condições de contorno naturais ou não essenciais (ou condições de contorno de Neumann): condições de contorno que envolvem derivadas de ordem m a $2m-1$.

Uma equação que combine uma condição de contorno essencial e uma natural é chamada de *condição de contorno mista*.

Para um mesmo ponto, apenas um tipo de condição de contorno pode ser especificada, isto é, se é especificada uma condição de contorno essencial, a natural, nesse mesmo ponto, ou região, não pode ser especificada, pois depende da condição de contorno já fornecida, e vice-versa ao se especificar uma condição de contorno natural. O que é possível é ter-se uma condição de contorno mista, isto é, para um mesmo ponto ou região, uma equação que envolve os dois tipos de condições de contorno.

Por exemplo, para uma equação diferencial de segunda ordem, condições de contorno essenciais são as derivadas de ordem zero, ou seja, a própria função, e condições de contorno naturais são as derivadas primeira da função.

A seguir são mostrados alguns exemplos de equações diferenciais associadas ao problema físico que representam.

Flexão de viga (material elástico-linear e teoria de pequenas deformações):

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = p(x)$$

para este caso,

$$D = EI \frac{d^4}{dx^4} \quad u = w \text{ (deflexão)} \quad f = p \text{ (carregamento transversal)}$$

e as condições de contorno naturais ($Bu - g = 0$)

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} - M_B = 0 \quad (\text{momento fletor})$$

$$EI \frac{d^3 w}{dx^3} - V_B = 0 \quad (\text{esforço cortante})$$

Como condições de contorno essenciais para este problema tem-se a deflexão w e sua derivada $\frac{dw}{dx}$, esta última representando a rotação.

Condução de calor unidimensional, em regime permanente:

$$\frac{d}{dx} \left[k(x)A(x) \frac{dT(x)}{dx} \right] + Q(x)A(x) = 0$$

onde

T = temperatura

k = condutividade térmica

A = área

Q = fonte de calor

$-k \frac{dT}{dx}$ = fluxo de calor

Como condição de contorno natural tem-se a especificação do fluxo ($q = -k \frac{dT}{dx}$), condição de contorno essencial a temperatura (T) e, para este problema, há a ocorrência comum de uma condição de contorno mista, representada pela troca de calor por convecção:

$$-k \frac{dT}{dx} - h(T - T^\infty) = 0,$$

onde

h é o coeficiente de troca de calor por convecção e T^∞ a temperatura do meio envolvendo a superfície do contorno.

Condução de calor bidimensional:

- regime permanente
- sem fonte de calor ($Q=0$)
- k e A constantes

$$\nabla^2 T = 0 \quad (\text{Equação de Laplace})$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \quad (\text{operador laplaciano bidimensional})$$

Escoamento potencial bidimensional:

$$\nabla^2 \mathbf{f} = 0$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = u \quad (\text{velocidade na direção } x)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} = v \quad (\text{velocidade na direção } y)$$

Eletrostática:

$$\frac{d}{dx} \left[\mathbf{e}(x)A(x) \frac{d\mathbf{f}(x)}{dx} \right] + \mathbf{r}(x)A(x) = 0$$

onde

\mathbf{f} = potencial elétrico

\mathbf{e} = permissividade

A = área

\mathbf{r} = densidade de carga elétrica

$\frac{d\mathbf{f}}{dx}$ = campo elétrico

Considerando o caso unidimensional, em geral desconhece-se a solução $u(x)$ do problema em questão, e procura-se uma solução aproximada $\tilde{u}(x)$. Tipicamente $\tilde{u}(x)$ é um polinômio que satisfaz as condições de contorno essenciais, e contém coeficientes a determinar a_1, a_2, \dots, a_n . Assim, para se obter a solução aproximada $\tilde{u}(x)$ deve-se determinar os coeficientes a_i tal que u e \tilde{u} sejam suficientemente próximas, segundo

um determinado critério estabelecido. Ou seja, $\tilde{u} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, sendo os coeficientes a_i determinados segundo critérios que serão vistos.

Substituindo \tilde{u} no lugar de u nas equações diferenciais (1.4), tem-se dois tipos de erros, ou resíduos

$$\begin{aligned} R_D &= R_D(a_i, x) = D\tilde{u} - f && \text{(resíduo interior, no domínio)} \\ R_C &= R_C(a_i, x) = B\tilde{u} - g && \text{(resíduo no contorno)} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Em alguns casos, existem somente condições de contorno essenciais. Assim, ao se aplicar o Método dos Resíduos Ponderados, R_C não necessita ser considerado, pois na escolha da solução aproximada \tilde{u} , esta deve, *a priori*, satisfazer as condições de contorno essenciais, tal como no método de Rayleigh-Ritz.

Os resíduos podem se anular para alguns valores de x , mas só serão nulos para todos os valores de x se a solução aproximada \tilde{u} for a solução exata, isto é, se $\tilde{u}(x) \equiv u(x)$. Presume-se que \tilde{u} é uma boa aproximação de u e os resíduos sejam pequenos. Resíduos pequenos podem ser alcançados de várias maneiras, cada uma delas resultando num sistema de equações algébricas de ordem n a ser resolvido, onde as incógnitas são os coeficientes a_i . Algumas dessas maneiras são apresentadas a seguir.

1.3.1 Método da Colocação

Para n diferentes valores de x , o resíduo é imposto como sendo nulo

$$\begin{aligned} R_D(a_i, x_i) &= 0 && \text{para } i=1, 2, \dots, j-1 \\ R_C(a_i, x_i) &= 0 && \text{para } i=j, j+1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.6)$$

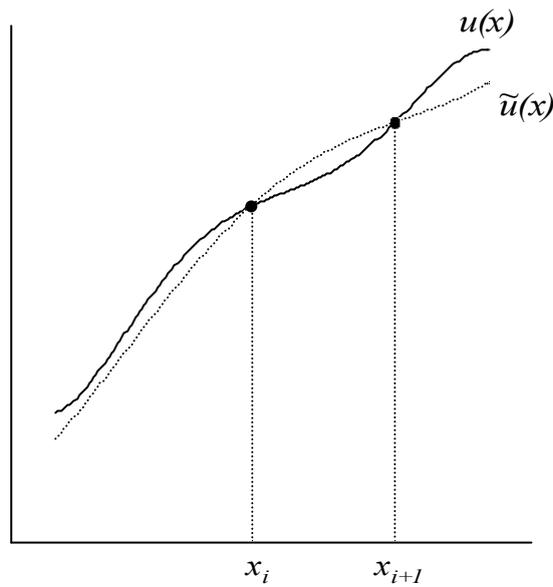


Figura 1.1: Representação do método da colocação, onde a solução aproximada é imposta igual à solução exata nas coordenadas x_i e x_{i+1} .

1.3.2 Subdomínio

Sobre n diferentes regiões do domínio \mathbf{W} e do contorno \mathbf{G} , a integral do resíduo é imposta nula

$$\int_{\mathbf{w}_i} R_D(a_i, x) d\mathbf{W} = 0 \quad \text{para } i=1, 2, \dots, j-1$$

$$\int_{\mathbf{g}_i} R_C(a_i, x) d\mathbf{G} = 0 \quad \text{para } i=j, j+1, \dots, n \quad (1.7)$$

1.3.3 Mínimos Quadrados

Os coeficientes a_i são escolhidos de forma a minimizar a função I :

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \quad \text{para } i=1, 2, \dots, n \quad (1.8)$$

A função I é formada integrando os quadrados dos resíduos:

$$I = \int_{\mathbf{W}} [R_D(a_i, x)]^2 d\mathbf{W} + \mathbf{a} \int_{\mathbf{G}} [R_C(a_i, x)]^2 d\mathbf{G} . \quad (1.9)$$

onde \mathbf{a} é um escalar arbitrário que pondera a importância de R_C em relação a R_D .

1.3.4 Colocação dos Mínimos Quadrados (ou Mínimos Quadrados pontuais)

Similar ao anterior, sendo que a função I é dada de forma discreta, isto é,

$$I = \sum_{i=1}^{i-l} [R_D(a_i, x_i)]^2 + \mathbf{a} \sum_{i=j}^n [R_C(a_i, x_i)]^2 \quad (1.10)$$

1.3.5 Galerkin (o mais importante!)

Selecionam-se *funções peso* $W_i = W_i(x)$ e impõe-se que a média ponderada do resíduo R_D com relação às funções peso é igual a zero. Em termos matemáticos, R_D é feito ortogonal às funções peso (o produto interno entre W_i e R_D é nulo - ver figura 1.2):

$$R_i = \int_{\mathbf{W}} W_i(x) R_D(a_i, x) d\mathbf{W} = 0 \quad \text{para } i=1, 2, \dots, n \quad (1.11)$$

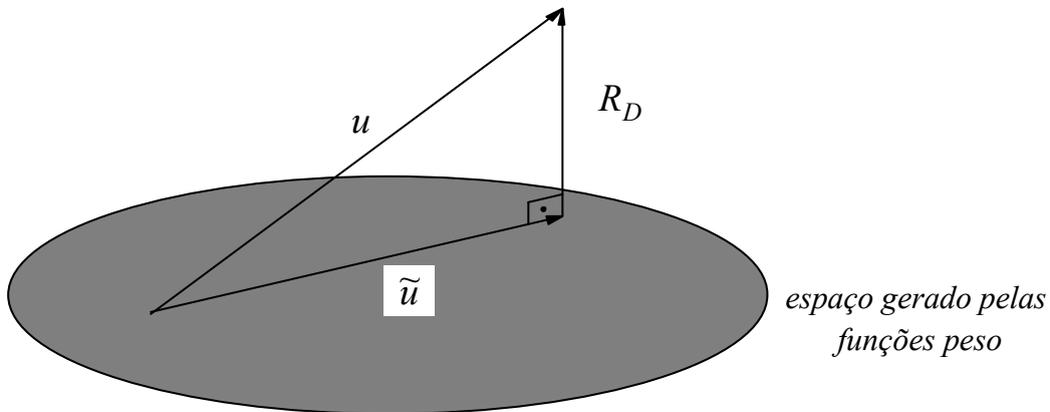


Figura 1.2: O resíduo R_D é ortogonal ao espaço gerado pelas funções peso W_i .

No método de *Bubnov-Galerkin*, ou comumente chamado simplesmente de *Galerkin*, as funções peso são os coeficientes das coordenadas generalizadas a_i . Assim,

$$W_i = \frac{\int \tilde{u}}{\int a_i} . \quad (1.12)$$

Ou seja, a base de funções para aproximar \tilde{u} e para aproximar W_i são as mesmas.

No método chamado de *Petrov-Galerkin* outras formas de W_i são utilizadas, ou seja, o conjunto de funções peso é diferente do conjunto de funções utilizadas para a aproximação.

No método de Galerkin, o resíduo no contorno R_C é usado em combinação com integração por partes, para a imposição das condições de contorno naturais.

Se existir um princípio variacional associado à equação diferencial, Galerkin e Rayleigh-Ritz darão soluções idênticas quando utiliza-se a mesma função aproximada \tilde{u} .

Exemplo - Método de Galerkin

Seja a equação diferencial¹

$$u_{,xx} + c x = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \quad (1.13a)$$

com condições de contorno²

$$\begin{aligned} u = 0 & \quad \text{em } x = 0 \quad (\text{Dirichlet}) \\ u_{,x} - b = 0 & \quad \text{em } x = L \quad (\text{Neumann}) \end{aligned} \quad (1.13b)$$

¹ Na equação diferencial que segue, e frequentemente no decorrer do texto será utilizada a notação

comma, ou seja, $(\bullet)_{,x}$ representa $\frac{\mathcal{F}(\bullet)}{\mathcal{F}x}$, $(\bullet)_{,xy}$ representa $\frac{\mathcal{F}^2(\bullet)}{\mathcal{F}x \mathcal{F}y}$, etc.

associada com o problema de uma barra submetida a um carregamento distribuído ao longo do comprimento, e um carregamento de tração na extremidade $x = L$ (veja Apêndice A). A barra possui seção transversal constante igual a A e módulo de elasticidade, também constante, igual a E . A figura 1.3 esquematiza o problema, sendo u a função deslocamento ao longo do eixo x .

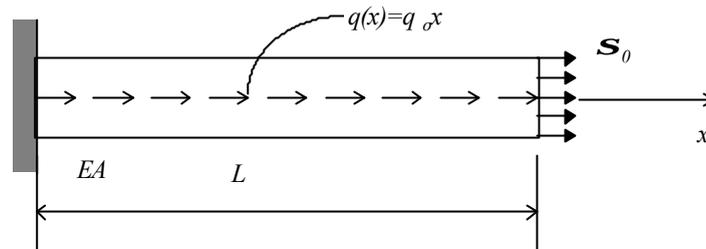


Figura 1.3: Barra submetida a tração e carregamento distribuído.

Os valores das constantes c e b são dados por

$$c = \frac{q_0}{EA} \quad b = \frac{S_0}{E} . \quad (1.14)$$

Escolhe-se como função aproximada \tilde{u} , por exemplo, um polinômio de segundo grau, da forma

$$\tilde{u} = a_1 x + a_2 x^2 . \quad (1.15)$$

Note que \tilde{u} satisfaz, independentemente dos coeficientes a_i a serem determinados, a condição de contorno de Dirichlet (essencial), que é o deslocamento nulo em $x = 0$. Ou seja, diz-se que \tilde{u} é um campo de deslocamentos cinematicamente admissível.

Aplicando-se o método de Galerkin, onde

$$R_i = \int_W W_i(x) R_D(a_i, x) dW = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1.16)$$

para o problema em questão, tem-se

$$R_i = \int_0^L W_i(x)(\tilde{u}_{,xx} + c x) dx = 0 \quad i=1, 2 \quad (1.17)$$

O Método de Galerkin inicia com uma integração por partes, reduzindo a ordem da diferenciação dentro da integral, relaxando assim a ordem da continuidade requerida para a função aproximada. A integração por partes também serve para introduzir as condições de contorno naturais (ou de Neumann), conforme será visto a seguir.

Integrando por partes apenas a parcela $W_i(x)\tilde{u}_{,xx}$, e lembrando a expressão da integração por partes:

$$\int u dv = u v - \int v du, \quad (1.18)$$

faz-se $u = W_i$ e $dv = \tilde{u}_{,xx} dx$ tendo-se

$$R_i = [W_i(x)\tilde{u}_{,x}]_0^L + \int_0^L (-W_{i,x} \tilde{u}_{,x} + W_i c x) dx = 0 \quad i = 1, 2 \quad (1.19)$$

Como $W_1 = \frac{\mathcal{I}\tilde{u}}{\mathcal{I}a_1} = x$ e $W_2 = \frac{\mathcal{I}\tilde{u}}{\mathcal{I}a_2} = x^2$ e, o termo fora da integral

$$W_i(x=0)\tilde{u}_{,x} = 0 \quad (\text{para } i=1 \text{ e } i=2, \text{ pois } W_1(x=0) = W_2(x=0) = 0)$$

e

$$W_i(x=L)\tilde{u}_{,x} = W_i(x=L)b, \quad (\text{ver condições de contorno, eq. 1.13b})$$

tem-se

$$R_i = \int_0^L (-W_{i,x}\tilde{u}_{,x} + W_i c x) dx + [W_i b]_{x=L} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (1.20)$$

e

$$W_{1,x} = 1$$

$$W_{2,x} = 2x$$

$$\tilde{u}_{,x} = a_1 + 2a_2x$$

obtendo-se as duas componentes do produto interno R_i .

i = 1

$$R_1 = \int_0^L (-a_1 - 2a_2x + cx^2) dx + bL = 0$$

$$\left[-a_1x - a_2x^2 + \frac{c}{3}x^3 \right]_0^L + bL = 0$$

$$-La_1 - L^2a_2 = -\frac{c}{3}L^3 - bL \quad (1.21)$$

i = 2

$$R_2 = \int_0^L (-2a_1x - 4a_2x^2 + cx^3) dx + bL^2 = 0$$

$$\left[-a_1x^2 - \frac{4}{3}a_2x^3 + \frac{c}{4}x^4 \right]_0^L + bL^2 = 0$$

$$-L^2a_1 - \frac{4}{3}L^3a_2 = -\frac{c}{4}L^4 - bL^2 \quad (1.22)$$

As equações (1.21) e (1.22) formam um sistema algébrico de equações lineares, cujas incógnitas são a_1 e a_2

$$\begin{bmatrix} -L & -L^2 \\ -L^2 & -\frac{4}{3}L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{3}cL^3 - bL \\ -\frac{1}{4}cL^4 - bL^2 \end{Bmatrix}, \quad (1.23)$$

sendo a solução deste sistema

$$a_1 = b + \frac{7cL^2}{12} \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{-cL}{4}. \quad (1.24)$$

Assim, a solução aproximada \tilde{u} fica

$$\tilde{u} = \left[b + \frac{7cL^2}{12} \right] x - \left[\frac{cL}{4} \right] x^2. \quad (1.25)$$

A solução exata deste problema é facilmente obtida, sendo dada por

$$u = \left[b + \frac{cL^2}{2} \right] x - \left[\frac{c}{6} \right] x^3. \quad (1.26)$$

Comparação de Resultados (software Mathcad)

Solução Analítica X Solução via Galerkin utilizando como função aproximada um polinômio de ordem 2

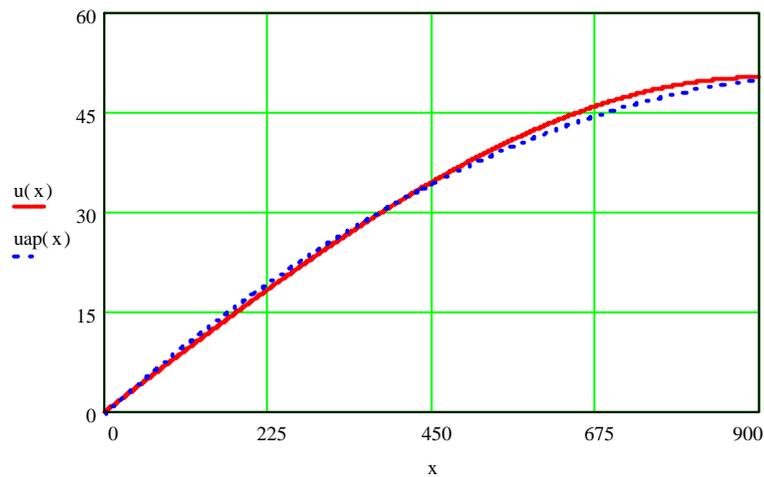
$\sigma_0 := 45$ $E := 2.1 \cdot 10^5$ $A := 150$ $q_0 := 6.5$ $L := 900$

$b := \frac{\sigma_0}{E}$ $c := \frac{q_0}{E \cdot A}$

Solução analítica: $u(x) := \left\{ b + \frac{c \cdot L^2}{2} \right\} \cdot x - \left\{ \frac{c}{6} \right\} \cdot x^3$

Solução via Galerkin: $u_{ap}(x) := \left\{ b + \frac{7 \cdot c \cdot L^2}{12} \right\} \cdot x - \left\{ \frac{c \cdot L}{4} \right\} \cdot x^2$

$x := 0, 0.5.. 900$



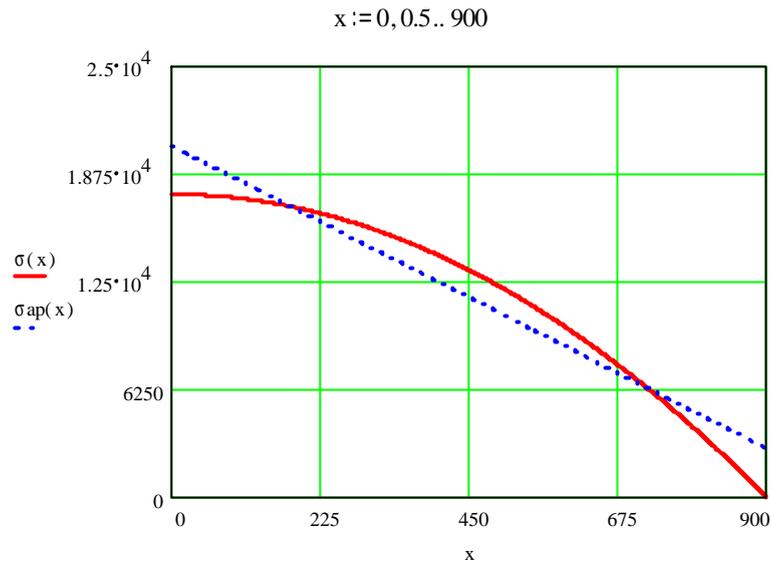
Cálculo de Tensões: $s = E e = E du/dx$

Solução Exata (tensão): $\sigma(x) := E \cdot \left[\frac{d}{dx} \left[\left\{ b + \frac{c \cdot L^2}{2} \right\} \cdot x - \left\{ \frac{c}{6} \right\} \cdot x^3 \right] \right]$

$\sigma(x) := E \cdot \left\{ b + \frac{1}{2} \cdot c \cdot L^2 - \frac{1}{2} \cdot c \cdot x^2 \right\}$

Solução via Galerkin (tensão): $\sigma_{ap}(x) := E \cdot \left[\frac{d}{dx} \left[\left\{ b + \frac{7 \cdot c \cdot L^2}{12} \right\} \cdot x - \left\{ \frac{c \cdot L}{4} \right\} \cdot x^2 \right] \right]$

$\sigma_{ap}(x) := E \cdot \left\{ b + \frac{7}{12} \cdot c \cdot L^2 - \frac{1}{2} \cdot c \cdot L \cdot x \right\}$



Fim da listagem do arquivo do Mathcad

Exercício

Resolver o problema anterior através do Método de Rayleigh-Ritz,

a) utilizando como função de aproximação: $\tilde{u} = a_1x + a_2x^2$;

b) utilizando como função de aproximação: $\tilde{u} = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

Comparar as duas soluções com a solução analítica, já dada anteriormente pela expressão (1.26), e com a solução via Galerkin utilizando $\tilde{u} = a_1x + a_2x^2$ (expressão 1.25).

CAPÍTULO 2

Elementos Finitos Unidimensionais

2.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS DE GALERKIN

Seja o mesmo problema da barra resolvido no capítulo anterior, representado pela equação diferencial

$$AEu_{,xx} + q(x) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L_T \quad (2.1a)$$

e com condições de contorno

$$\begin{aligned} u = 0 & \quad \text{em } x = 0 \quad \text{e} \\ AEu_{,x} - P = 0 & \quad \text{em } x = L_T \end{aligned} \quad (2.1b)$$

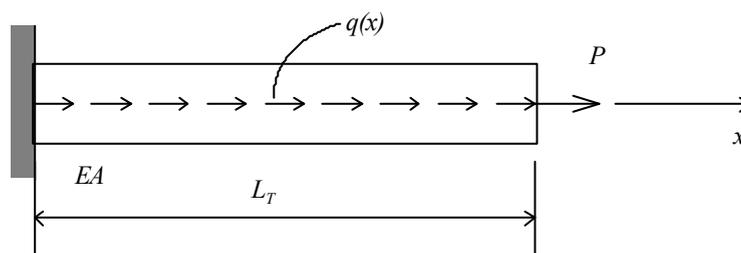


Figura 2.1: Barra submetida a tração.

Para aplicação do Método dos Elementos Finitos ao problema acima, subdivide-se o corpo em análise, no presente caso a barra, em uma série de *pedaços*, chamados elementos finitos, e aplica-se o método de Galerkin em um pedaço (elemento finito) característico da estrutura. A função aproximada, no Método dos Elementos Finitos, tem como incógnitas os deslocamentos em determinados pontos do elemento, sendo esses

pontos denominados nós. O número de nós depende do tipo de função de aproximação que se está arbitrando. Se for uma equação de primeiro grau (polinômio de grau 1), isto é, o deslocamento é linear ao longo do comprimento do elemento, ter-se-á dois nós, localizados nas duas extremidades do elemento. Se se arbitrar uma função quadrática (polinômio de grau 2), ter-se-á três nós, um em cada extremidade, e um terceiro intermediário, e assim por diante. Deste modo obtém-se um sistema algébrico de equações, característico de um elemento finito, sendo as incógnitas os deslocamentos nodais do elemento. Monta-se esse sistema para cada um dos elementos que formam a estrutura, sendo feita depois a superposição, isto é, juntam-se os *pedaços* do corpo, de modo a preservar a *continuidade*, ou seja, deslocamentos em nós coincidentes serão iguais, obtendo-se um sistema algébrico de equações para toda a estrutura. No estudo de condução de calor, ao invés de deslocamentos nodais como incógnitas, tem-se temperaturas nodais. No caso da barra, tem-se uma incógnita associada com cada nó, portanto tem-se um *grau de liberdade* por nó. Posteriormente será visto que pode-se ter mais incógnitas, graus de liberdade, associadas a apenas um nó, como é o caso da elasticidade plana, onde tem-se como incógnitas dois deslocamentos, um em cada direção, e portanto o elemento finito terá dois graus de liberdade por nó. Para elementos finitos unidimensionais, sua representação é apenas uma linha, unindo os seus nós (figura 2.4).

Na análise do problema da figura 2.1, divide-se a barra em três elementos finitos, de comprimentos L_1 , L_2 e L_3 , conforme figura 2.2. O processo de divisão do corpo em elementos finitos chama-se discretização.

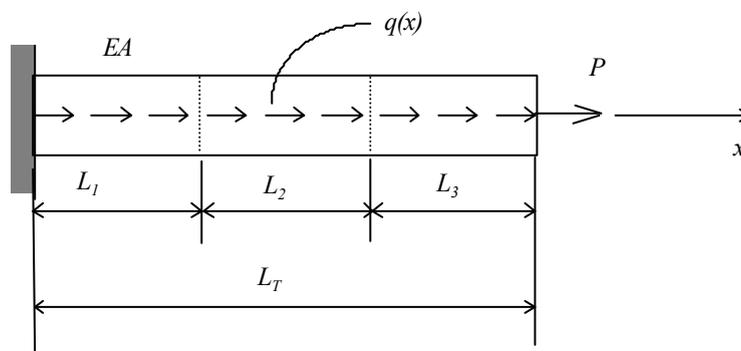


Figura 2.2: Discretização em elementos finitos.

Analisa-se um elemento característico, de comprimento L , conforme mostra a figura 2.3.

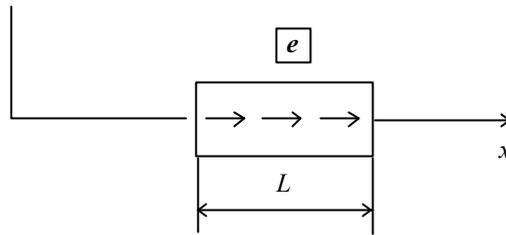


Figura 2.3: Elemento finito característico.

Faz-se agora a aproximação \tilde{u} , para o elemento. Esta função aproximada terá como incógnitas os deslocamento nos pontos nodais. Como exemplo, arbitrar-se-á uma função aproximada de primeiro grau, isto é, o deslocamento ao longo do elemento será uma interpolação linear entre os deslocamentos das extremidades. Portanto, o elemento e terá dois nós, localizados nas extremidades, sendo seus graus de liberdade (incógnitas) os deslocamentos nessas posições, ou seja, u_1 e u_2 , conforme mostra a figura 2.4.

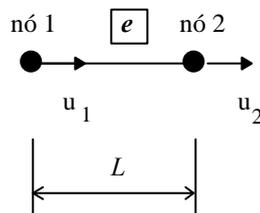


Figura 2.4: Nós e graus de liberdade do elemento finito.

Sem perda de generalidade, considerando o sistema de coordenadas com origem no nó 1, \tilde{u} pode ser escrito da seguinte forma

$$\tilde{u}(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \frac{x}{L}u_2 \quad (2.2)$$

ou, de uma forma mais geral

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^2 N_i(x)u_i \quad (2.3)$$

onde N_i são as chamadas funções de interpolação, sendo que i varia de 1 ao número de nós do elemento que, no presente caso, é igual a dois. As funções de interpolação N_i portanto, são dadas por²

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{e} \quad N_2 = \frac{x}{L} \quad (2.4)$$

Verifique que para as coordenadas nodais \tilde{u} é igual aos deslocamentos nodais, ou seja, para $x = 0$ $\tilde{u} = u_1$ e para $x = L$ $\tilde{u} = u_2$.

A expressão (2.3) pode ser expressa, em forma matricial

$$\tilde{u}(x) = [N]\{\mathbf{u}\}, \quad (2.5)$$

onde $[N]$ é denominada de matriz das funções de interpolação do elemento, e $\{\mathbf{u}\}$ o vetor de deslocamentos nodais do elemento. A expressão (2.5) é uma expressão geral, onde $[N]$ contém funções de interpolação (não necessariamente lineares), e $\{\mathbf{u}\}$ representa todos os graus de liberdade do elemento. Esta forma será extensivamente utilizada no decorrer do presente texto. Para uma interpolação linear $[N]$ e $\{\mathbf{u}\}$ são dados por

$$[N] = \left[\left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad \left(\frac{x}{L} \right) \right]_{1 \times 2} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{2 \times 1}. \quad (2.6)$$

Em uma forma gráfica, a equação (2.2) pode ser representada pela figura 2.5, onde os deslocamentos ao longo do elemento são interpolados, de forma linear, pelos deslocamentos das extremidade, u_1 e u_2 .

² A obtenção das funções de interpolação será vista no item 2.8.

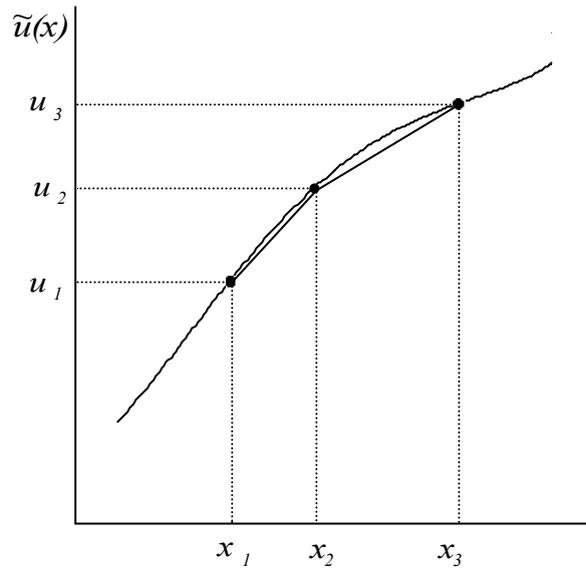


Figura 2.5: Interpolação linear de deslocamentos.

Definida a função de aproximação \tilde{u} , pelo método de Galerkin, as funções peso W_i são dadas por

$$W_i = \frac{\mathcal{I}\tilde{u}}{\mathcal{I}u_i} = N_i \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} W_1 &= N_1 = 1 - \frac{x}{L} \\ W_2 &= N_2 = \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (2.7)$$

e as equações de Galerkin são dadas por

$$R_i = \int_0^L W_i(x) (AE\tilde{u}_{,xx} + q) dx = 0 \quad (2.8)$$

Assim

$$\int_0^L N_i (AE\tilde{u}_{,xx} + q) dx = 0 \quad (2.9)$$

Integrando por partes a primeira parcela da expressão (2.9)

$$\int_0^L N_i AE \tilde{u}_{,xx} dx = [N_i AE \tilde{u}_{,x}]_0^L - \int_0^L N_{i,x} AE \tilde{u}_{,x} dx \quad (2.10)$$

Note que no contorno $AE \tilde{u}_{,x} = AE e = A s = P$ (carga concentrada aplicada), e portanto são as condições de contorno naturais.

Assim, tem-se

$$R_i = \int_0^L -(N_{i,x} A E \tilde{u}_{,x} + N_i q) dx + [N_i P]_0^L = 0 \quad (2.11)$$

Para $i=1$

$$\int_0^L (-N_{1,x} AE (N_{1,x} u_1 + N_{2,x} u_2) + N_1 q) dx + [N_1(x=L)P - N_1(x=0)P] = 0$$

$$\int_0^L -N_{1,x} AE (N_{1,x} u_1 + N_{2,x} u_2) dx + \int_0^L N_1 q dx + [N_1(x=L)P - N_1(x=0)P] = 0$$

$$\int_0^L -(N_{1,x} A E N_{1,x} u_1 + N_{1,x} A E N_{2,x} u_2) dx = \int_0^L -N_1 q dx - P_1 \quad (2.12)$$

como

$$N_{1,x} = -\frac{1}{L} \quad \text{e} \quad N_{2,x} = \frac{1}{L} \quad (2.13)$$

e multiplicando toda a expressão por -1 , tem-se

$$\int_0^L \left(\frac{1}{L} AE \frac{1}{L} u_1 + \frac{-1}{L} AE \frac{1}{L} u_2 \right) dx = \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) q dx + P_1 \quad (2.14)$$

Integrando obtém-se

$$\frac{EA}{L}u_1 - \frac{EA}{L}u_2 = P_1 + \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) q dx . \quad (2.15)$$

Procedendo de forma similar para $i=2$, obtém-se a segunda equação

$$-\frac{EA}{L}u_1 + \frac{EA}{L}u_2 = P_2 + \int_0^L \frac{x}{L} q dx . \quad (2.16)$$

O segundo termo da direita nas expressões (2.15) e (2.16) são chamados de forças nodais consistentes, pois são forças aplicadas nos nós, provenientes de uma força distribuída ao longo do elemento. São ditas consistentes pois são ponderadas pelas funções de interpolação.

Em forma matricial, as duas últimas expressões podem ser escritas como

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

onde

$$F_1 = P_1 + \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) q dx \quad F_2 = P_2 + \int_0^L \frac{x}{L} q dx \quad (2.18)$$

ou, de forma compacta

$$[\mathbf{K}^E] \{\mathbf{u}^E\} = \{\mathbf{F}^E\} , \quad (2.19)$$

onde

$$[\mathbf{K}^E] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{é a matriz de rigidez do elemento}$$

$$\{\mathbf{u}^E\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{é o vetor deslocamentos nodais do elemento}$$

$$\{\mathbf{F}^E\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad \text{é o vetor de carregamentos nodais do elemento.}$$

A expressão (2.17) (ou (2.19)) é a equação de elementos finitos para o elemento de barra, considerando a utilização de funções de interpolação lineares.

Agora, necessita-se montar a equação para toda a estrutura. Isto é feito superpondo-se todos os elementos que compõem a estrutura, ou seja

$$\sum_{E=1}^{NE} ([\mathbf{K}^E])\{\mathbf{u}\} = \sum_{E=1}^{NE} (\{\mathbf{F}^E\}) \quad \text{ou} \quad [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}, \quad (2.20)$$

onde

$[\mathbf{K}]$ é a matriz de rigidez global da estrutura, isto é, uma matriz que engloba todas as matrizes elementares,

$\{\mathbf{u}\}$ é o vetor deslocamentos nodais da estrutura,

$\{\mathbf{F}\}$ é o vetor de carregamentos nodais da estrutura.

A seguir é mostrado como são obtidas as matrizes e vetores globais, que representam toda a estrutura.

Voltando agora à barra, que foi dividida em três elementos, numera-se todos os elementos e nós da estrutura. A estrutura portanto terá quatro nós (figura 2.6).

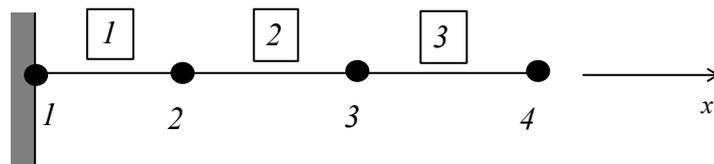


Figura 2.6: Barra discretizada em três elementos finitos.

Observando a figura 2.6, verifica-se que o elemento 1 é composto pelos nós 1 e 2, o elemento 2 pelos nós 2 e 3, e o elemento 3 pelos nós 3 e 4. Esta relação entre número do elemento e numeração dos nós globais dá-se o nome de conectividade ou incidência (ver tabela 2.1).

Tabela 2.1: Tabela da conectividade

Elemento	Nó 1	Nó 2
1	1	2
2	2	3
3	3	4

Montando a matriz de rigidez e vetor de carga para cada um dos elementos e, para generalizar o problema, considera-se que cada um dos elementos tenha diferentes propriedades, isto é, módulo de elasticidade E_1, E_2, E_3 ; área da seção transversal A_1, A_2, A_3 e comprimento L_1, L_2, L_3 . Para efeitos de demonstração da superposição do vetor carga, será considerado que a força distribuída é constante, isto é, $q(x) = q_0$.

Elemento 1: composto pelos nós 1 e 2.

Matriz de rigidez e vetor de carga do elemento, associados aos graus de liberdade u_1 e u_2

$$[\mathbf{K}^I] = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \quad \{\mathbf{F}^I\} = \begin{Bmatrix} F_1^I \\ F_2^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q_0 L_1}{2} + R_1 \\ \frac{q_0 L_1}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

Onde R_1 é a reação na direção x, devido à restrição no nó 1, e também *desconhecia a priori*.

Elemento 2: composto pelos nós 2 e 3.

Matriz de rigidez e vetor de carga do elemento, associados aos graus de liberdade u_2 e u_3

$$[\mathbf{K}^2] = \frac{E_2 A_2}{L_2} \begin{bmatrix} & u_2 & u_3 \\ & 1 & -1 \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ u_3 \end{matrix} \quad \{\mathbf{F}^2\} = \begin{Bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q_0 L_2}{2} \\ \frac{q_0 L_2}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Elemento 3: composto pelos nós 3 e 4.

Matriz de rigidez e vetor de carga do elemento, associados aos graus de liberdade u_3 e u_4

$$[\mathbf{K}^3] = \frac{E_3 A_3}{L_3} \begin{bmatrix} & u_3 & u_4 \\ & 1 & -1 \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ u_4 \end{matrix} \quad \{\mathbf{F}^3\} = \begin{Bmatrix} F_1^3 \\ F_2^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q_0 L_3}{2} \\ \frac{q_0 L_3}{2} + P \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

2.2 OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE CARGA GLOBAIS

A matriz de rigidez global $[\mathbf{K}]$ e do vetor de carga global $\{\mathbf{F}\}$ da estrutura são obtidos a partir da superposição das matrizes e vetores elementares, criando-se uma matriz (ou vetor) que englobe todas as matrizes elementares. Os efeitos dos graus de liberdade coincidentes são “somados”, da seguinte forma

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} & -\frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{L_1} & \frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{E_2 A_2}{L_2} & -\frac{E_2 A_2}{L_2} & 0 \\ 0 & -\frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{E_2 A_2}{L_2} + \frac{E_3 A_3}{L_3} & -\frac{E_3 A_3}{L_3} \\ 0 & 0 & -\frac{E_3 A_3}{L_3} & \frac{E_3 A_3}{L_3} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

o vetor de deslocamentos globais é dado por

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

e o vetor de carga global

$$\{\mathbf{F}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 + F_1^2 \\ F_2^2 + F_1^3 \\ F_2^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q_0 L_1}{2} + R_1 \\ \frac{q_0 L_1}{2} + \frac{q_0 L_2}{2} \\ \frac{q_0 L_2}{2} + \frac{q_0 L_3}{2} \\ \frac{q_0 L_3}{2} + P \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Note que a matriz de rigidez global (2.24) é simétrica e apresenta valores não nulos somente na diagonal principal e nas diagonais adjacentes, caracterizando a chamada matriz banda. Em programas de elementos finitos, dependendo do tipo de solução, estas propriedades diminuem o espaço de armazenamento da matriz. Por exemplo, pode-se armazenar somente os elementos da matriz que estiverem na semi-banda superior (ou inferior), conforme representa a figura 2.7, onde na primeira coluna é armazenada a diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} a & e & 0 & 0 \\ e & b & f & 0 \\ 0 & f & c & g \\ 0 & 0 & g & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \\ d & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 2.7: Representação do armazenamento em banda de uma matriz simétrica.

Considerando os três elementos finitos do mesmo tamanho: $L_1 = L_2 = L_3 = L$, mesma área de seção transversal, $A_1 = A_2 = A_3 = A$ e mesmo módulo de elasticidade, $E_1 = E_2 = E_3 = E$, tem-se o seguinte sistema linear a ser resolvido:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q_0 L}{2} + R_I \\ q_0 L \\ q_0 L \\ \frac{q_0 L}{2} + P \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

O sistema de equações acima ainda não pode ser solucionado pois a matriz de rigidez é singular. Para se poder obter uma solução é necessário impor as condições de contorno, isto é, impor ao modelo sua vinculação (suportes). Caso o número de vinculações seja insuficiente, a matriz continuará sendo singular. Fisicamente isto indica que algum movimento de corpo rígido ainda é possível. Sem vinculações suficientes a estrutura pode assumir infinitas configurações, não sendo possível obter uma única solução.

2.3 IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para o exemplo da figura 2.6, tem-se, como única vinculação, o deslocamento nulo do nó 1, ou seja:

$$u_1 = 0 \tag{2.}$$

e o sistema linear da expressão (2.27) pode ser reescrito como

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q_0 L \\ q_0 L \\ \frac{q_0 L}{2} + P \end{Bmatrix}, \tag{2.29}$$

onde a primeira equação de (2.29) foi eliminada, sendo substituída pela equação $u_1 = 0$, e como sabe-se que o deslocamento no nó 1 é nulo, eliminou-o das outras equações. Ao invés de se resolver o sistema de 4 equações a 4 incógnitas (2.29), pode-se agora resolver o seguinte sistema de 3 equações a 3 incógnitas:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 L \\ q_0 L \\ \frac{q_0 L}{2} + P \end{Bmatrix}. \tag{2.30}$$

No caso de se ter um valor de variável prescrita (deslocamento) u_1 diferente de zero, ou seja $u_1 = \bar{u}_1$ (comum em problema de distribuição de temperatura, onde tem-se temperaturas prescritas diferentes de zero), a imposição desta restrição é feita da seguinte forma:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{EA}{L} \bar{u}_1 \\ q_0 L + \frac{EA}{L} \bar{u}_1 \\ q_0 L \\ \frac{q_0 L}{2} + P \end{Bmatrix}. \quad (2.31)$$

Assim, de uma forma geral, quando se tem o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2i} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ii} & \cdots & k_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{ni} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

com vinculação $u_i = \bar{u}_i$, o sistema acima pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & 0 & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & 0 & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - k_{1i} \bar{u}_i \\ F_2 - k_{2i} \bar{u}_i \\ \vdots \\ \bar{u}_i \\ \vdots \\ F_n - k_{ni} \bar{u}_i \end{Bmatrix}. \quad (2.33)$$

A forma de imposição das condições de contorno mostrada acima é uma, dentre as várias existentes.

2.4 RESOLUÇÃO DO SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR E DETERMINAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS

Após feita a imposição das condições de contorno, resolve-se, por algum método numérico, o sistema linear de equações, obtendo-se assim os deslocamentos nodais.

Dentre os métodos de solução de sistema de equações lineares podemos destacar os métodos diretos da eliminação de Gauss, decomposição LU, decomposição de Cholesky, método de solução frontal (*wavefront*), e os métodos iterativos de Gauss-Seidel, Jacobi, IOR, Gradiente Otimizado (*Steepest Descent*), Gradientes Conjugados, entre outros. Cada um desses métodos tem vantagens e desvantagens, dependendo do tipo de matriz obtida (simétrica, não-simétrica, positiva definida, matriz banda, matriz esparsa, condicionamento, etc), da disponibilidade de memória do computador, precisão de resultados e tempo necessário para obtenção da solução

Como para o problema estudado o sistema de equações possui pequena dimensão, representado pelas expressões (2.29) ou (2.30), pode-se resolvê-lo facilmente, obtendo-se os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 0 \\
 u_2 &= \frac{5 q_0 L^2}{2 EA} + \frac{PL}{EA} \\
 u_3 &= \frac{4 q_0 L^2}{EA} + \frac{2PL}{EA} \\
 u_4 &= \frac{9 q_0 L^2}{2 EA} + \frac{3PL}{EA} .
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

A solução analítica para este problema é dada por

$$u(x) = \int_0^x \frac{P(x)}{EA(x)} dx = \frac{q_0}{EA} \left(L_T x - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{Px}{EA} = \frac{q_0}{EA} \left(3Lx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{Px}{EA}
 \tag{2.35}$$

que, nas posições correspondentes aos nós, tem-se os mesmos valores obtidos pela solução numérica (2.34).

A coincidência de resultados entre a solução numérica e a solução exata, nos pontos nodais, ocorre apenas para problemas simples e, como já mencionado, na maioria dos casos não se tem uma solução analítica para comparação de resultados. Nesses casos a qualidade da solução numérica obtida é analisada de outras formas, utilizando-se estimadores de erros (Szabó & Babuska, 1991; Zienkiewicz & Zhu, 1987).

Substituindo em (2.34) os seguintes valores numéricos:

$$\begin{aligned}L_T &= 900\text{mm} \\ q_o &= 6.5\text{ N/mm} \\ P &= 6750\text{ N} \\ E &= 2.1 \times 10^5\text{ MPa} \\ A &= 150\text{mm}^2,\end{aligned}\tag{2.36}$$

obtem-se os valores de deslocamento nos pontos nodais:

$$\begin{aligned}u_1 &= 0 \\ u_2 &= 0.11071\text{mm} \\ u_3 &= 0.20286\text{mm} \\ u_4 &= 0.27643\text{mm}\end{aligned}\tag{2.37}$$

Graficamente, as duas soluções podem ser visualizadas na figura 2.8

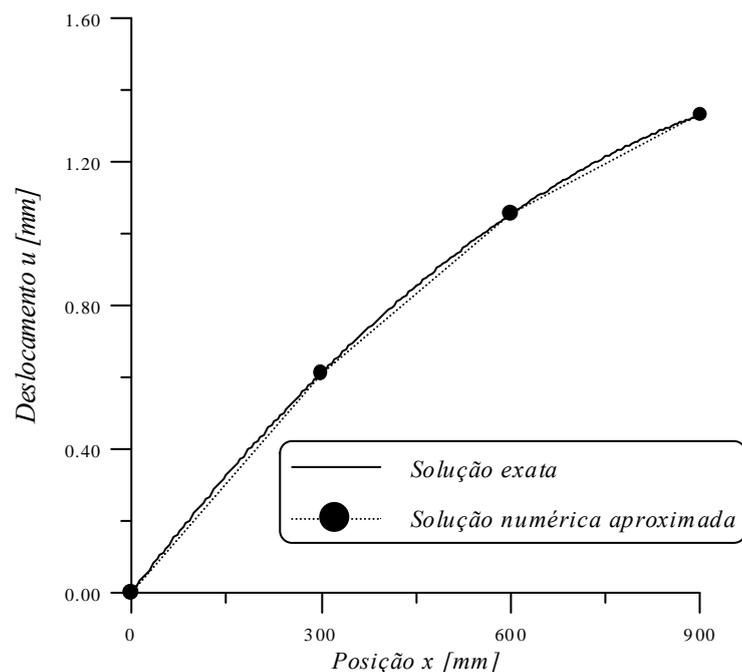


Figura 2.8: Solução exata e solução através do MEF.

Note que a solução analítica é um polinômio de segundo grau (parábola), enquanto a solução numérica (MEF) é linear, dentro de cada elemento, devido à escolha do tipo das funções de interpolação. Se fossem utilizadas funções de interpolação de ordem maior, um polinômio quadrático ou cúbico, a solução numérica e a solução exata seriam coincidentes ao longo de toda a barra. Note também que, se o carregamento distribuído constante q_0 for nulo, a solução numérica e a solução analítica são coincidentes ao longo de toda a barra, e não somente nos pontos nodais. Isto era de se esperar, pois a solução analítica é linear e as funções de interpolação utilizadas também são lineares.

2.5 CÁLCULO DE DEFORMAÇÕES E TENSÕES (QUANTIDADES DERIVADAS)

Analisar-se-á agora as derivadas da função aproximada $\tilde{u}(x)$ e da solução analítica $u(x)$. Essas derivadas estão associadas às deformações, e conseqüentemente às tensões. Para uma barra submetida a um esforço normal, a deformação normal e_x é dada por

$$e_x = \frac{du}{dx} \quad (2.38)$$

e a tensão normal, utilizando a Lei de Hooke

$$s_x = E e_x . \quad (2.39)$$

Para a solução via elementos finitos, uma vez calculados os deslocamentos nodais, basta calcular, para cada elemento finito, a deformação e_x , dada pela derivada

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} .$$

Como os deslocamentos são dados por

$$\tilde{u}(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2 = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \frac{x}{L} u_2 \quad (2.39)$$

A deformação no elemento é dada por:

$$\mathbf{e}_x = \frac{d\tilde{u}}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{x}{L} \right) u_1 + \frac{x}{L} u_2 \right] = \frac{u_2 - u_1}{L}. \quad (2.40)$$

E a tensão no elemento fica:

$$\mathbf{s}_x = E\mathbf{e}_x = E \frac{u_2 - u_1}{L}, \quad (2.41)$$

onde u_1 e u_2 são os deslocamentos nodais do elemento.

A derivada da solução (deformação e tensão) via MEF é contínua apenas ao longo do elemento finito, possuindo descontinuidades nos pontos nodais

A derivada da solução analítica (equação 2.35) é dada por

$$\mathbf{e}_x = \frac{du}{dx} = \frac{q_0}{EA} (L_T - x) + \frac{P}{EA} = \frac{q_0}{EA} (3L - x) + \frac{P}{EA}. \quad (2.42)$$

e a tensão

$$\mathbf{s}_x = E\mathbf{e}_x = \frac{q_0}{A} (3L - x) + \frac{P}{A} \quad (2.43)$$

A figura 2.9 mostra, graficamente, para os valores numéricos utilizados na expressão (2.36) a derivada da solução analítica e da solução numérica, sendo esta última constante ao longo de um elemento finito.

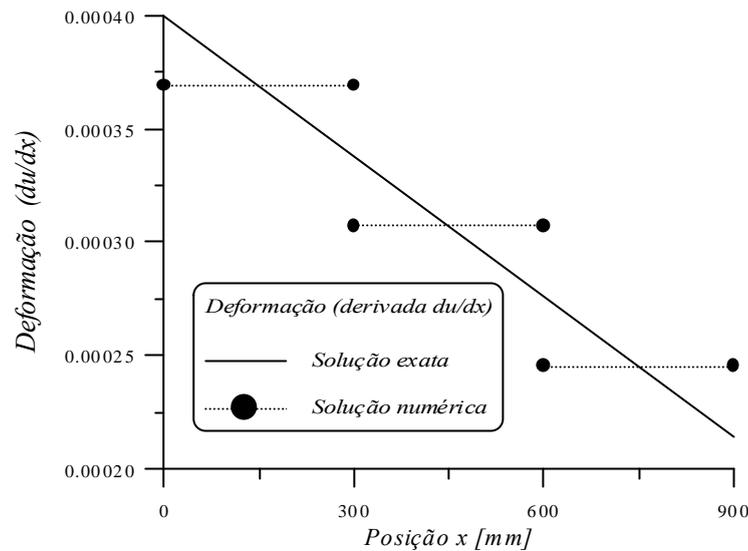


Figura 2.9: Derivada da solução exata e da solução via MEF.

Note que na interface entre os elementos finitos as deformações, e conseqüentemente as tensões, são descontínuas. Para obtenção das tensões nesses pontos, várias técnicas podem ser utilizadas (Cook, Malkus & Plesha, 1989; Hinton & Campbell, 1974), sendo a mais simples a média ponderada entre os valores na descontinuidade. Essa descontinuidade das derivadas acontece devido à escolha das funções de interpolação, que são da classe C^0 (C zero), isto é, apenas a função de interesse é contínua ao longo de todo o corpo. Se fossem utilizadas funções de interpolação da classe C^1 (C um), como por exemplo os polinômios de Hermite (Ziekiewicz & Taylor, 1991), não só a função seria contínua, como também sua derivada primeira, mas em contrapartida teria-se mais graus de liberdade, e o sistema linear a ser resolvido seria de maior ordem. Certos tipos de problemas, como por exemplo na modelagem de vigas utilizando a teoria clássica (viga de Euler-Bernoulli), exige-se, para se ter uma adequada convergência, a escolha de funções da classe C^1 . Esta exigência do grau de continuidade está associada com a ordem do operador diferencial da equação que rege o problema. Se o operador for de ordem $2m$, exige-se, pelo menos, funções de continuidade C^{m-1} (Cook, Malkus & Plesha, 1988).

As afirmações acima sobre a continuidade das variáveis de interesse, suas derivadas e das funções de interpolação requeridas, são válidas para os chamados elementos finitos baseados em campos de deslocamentos, isto é, onde somente as

variáveis primais são aproximadas (deslocamentos na mecânica dos sólidos, temperatura em problemas de condução de calor, campo eletromagnético em problemas de eletromagnetismo, etc.). Para outros tipos de formulações, tais como as formulações híbridas e mistas, as afirmações não são válidas. Formulações de elementos híbridos e mistos fogem ao escopo deste texto. Detalhes sobre tais elementos podem ser encontrados em Pian & Tong (1987).

Fazendo uma análise para o caso de $q_0 = 0$, tem-se que a derivada da solução analítica e da solução numérica são coincidentes, sendo constante ao longo de todo o comprimento da barra (figura 2.10). Obviamente para a variável primal, deslocamento u , as soluções também são coincidentes ao longo de todo o corpo.

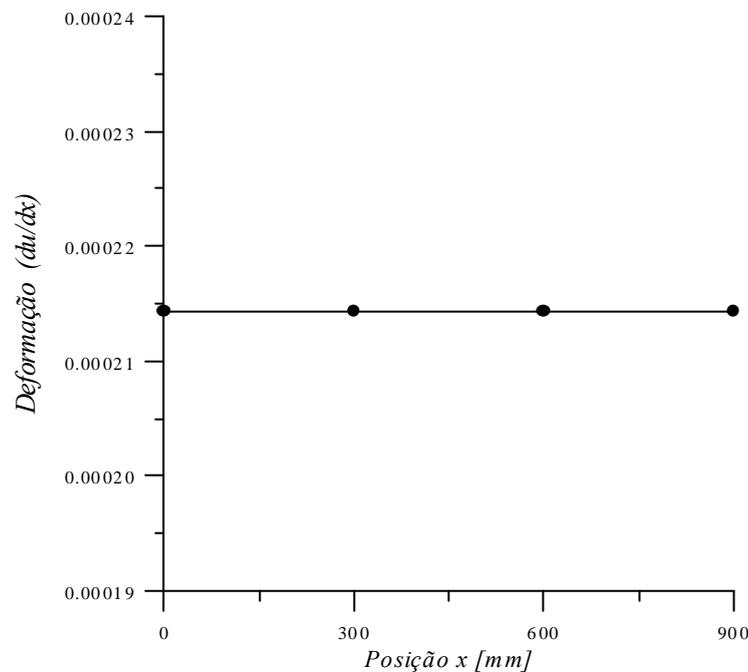


Figura 2.10: Coincidência entre a derivada da solução exata e a derivada da solução numérica para o caso do carregamento distribuído q_0 ser nulo.

2.6 CÁLCULO DAS REAÇÕES

Voltando ao sistema de equações antes da imposição das condições de contorno, expressão (2.27), tinha-se

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q_0 L}{2} + R_I \\ q_0 L \\ q_0 L \\ \frac{q_0 L}{2} + P \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

Como já foram determinados os deslocamentos nodais, pode-se utilizar a primeira equação para a determinação da reação R_I :

$$\frac{EA}{L} u_1 + \frac{EA}{L} u_2 + 0u_3 + 0u_4 = \frac{q_0 L}{2} + R_I \quad (2.45)$$

De (2.34) tem-se que

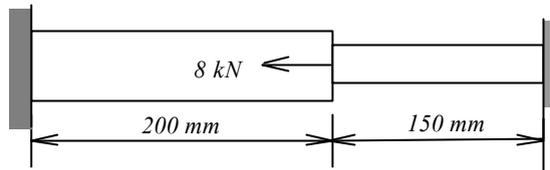
$$u_1 = 0 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{5 q_0 L^2}{2 EA} + \frac{PL}{EA} \quad (2.46)$$

Assim, $R_I = -3 q_0 L - P$ que é o mesmo resultado obtido por equilíbrio (verifique!).

Portanto, para se obter as reações, primeiramente determinam-se os deslocamentos nodais, e em posse deles, retorna-se ao sistema de equações original (antes da imposição das condições de contorno).

Exercício

Seja a barra escalona mostrada abaixo, com seções transversais circulares de 10 mm e 6 mm de diâmetro, e módulo de elasticidade $E = 7 \times 10^4\text{ MPa}$. Calcule as tensões nas barras e as reações utilizando elementos finitos.

**2.7 CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE**

O problema de condução de calor unidimensional, com área A e condutividade térmica k constantes, em regime permanente, é regido pela seguinte equação diferencial

$$k \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + Q(x) = 0, \quad (2.47)$$

sendo $Q(x)$ a fonte interna de calor por unidade de volume.

Note que a equação diferencial (2.47) é da mesma forma que a equação da barra (2.1a) e, portanto, para um elemento, utilizando funções de interpolação lineares, a equação de elementos finitos é dada por

$$\frac{k}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} Q dx + \begin{Bmatrix} q_{R1} \\ q_{R2} \end{Bmatrix}, \quad (2.48)$$

onde T_1 e T_2 são as temperaturas nos pontos nodais do elemento, e q_r está associado com o fluxo de calor no contorno. O exemplo a seguir ilustra um problema de condução unidimensional solucionado pelo MEF.

Exemplo:

Usando cinco elementos finitos, resolva o problema de distribuição de temperaturas no sólido apresentado na figura abaixo:

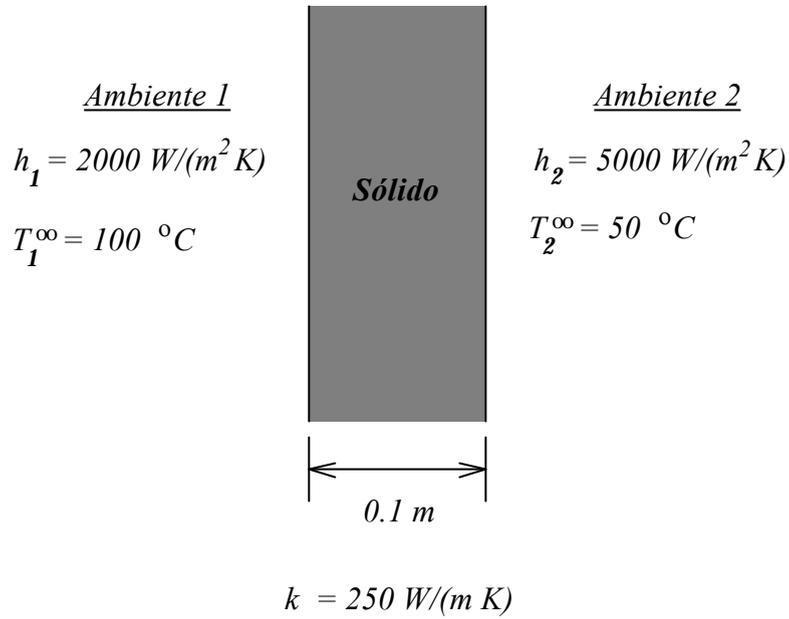


Figura 2.11: Problema de distribuição de temperaturas.

Divide-se o corpo em cinco elementos finitos de mesmo comprimento, conforme figura 2.12

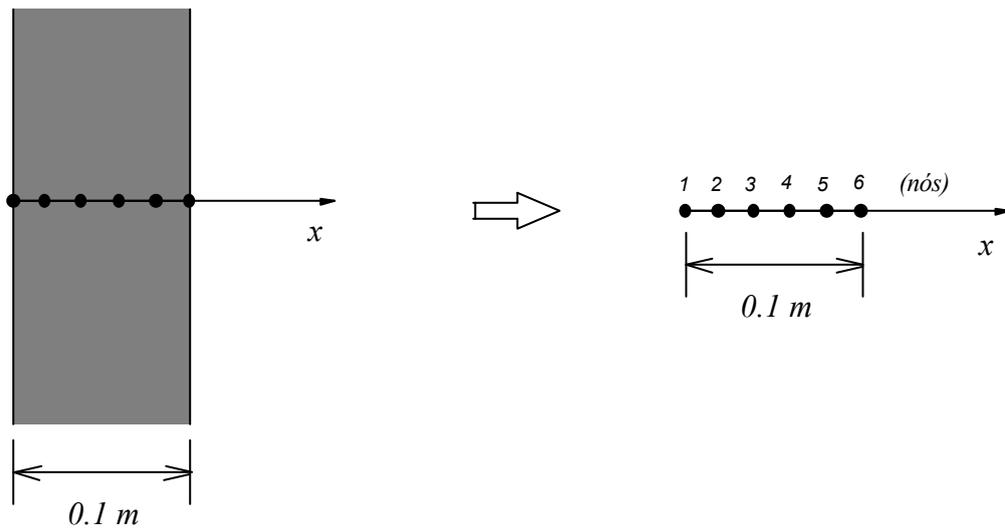


Figura 2.12: Discretização do problema em cinco elementos finitos.

O modelo de elementos finitos possui 5 elementos e 6 nós, sendo sua conectividade dada na tabela 2.2:

Tabela 2.2: Conectividade para o modelo de elementos finitos da figura 2.12.

<i>Elemento</i>	<i>Nó 1</i>	<i>Nó 2</i>
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6

A equação de elementos finitos para cada elemento pode ser obtida à partir de (2.48), sendo $Q(x) = 0$, pois não há fonte interna de calor. Como o tamanho dos elementos é igual, a matriz de rigidez elementar, para os cinco elementos, toma a mesma forma

$$[\mathbf{K}^E] = \frac{k}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 12500 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Fazendo-se a superposição para todos os elementos finitos, da mesma forma que foi feito para o problema da barra, tem-se o seguinte sistema global, antes de serem impostas as condições de contorno

$$12500 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{R1} \\ q_{R2} \\ q_{R3} \\ q_{R4} \\ q_{R5} \\ q_{R6} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Na posição $x = 0$ (nó 1), e na posição $x = 0.1$, o fluxo de calor é dado através da condição de convecção:

$$\begin{aligned}
 q_{R1} &= h_1(T_1^\infty - T_1) = 200000 - 2000T_1 \\
 q_{R6} &= h_2(T_2^\infty - T_6) = 250000 - 5000T_6
 \end{aligned}
 \tag{2.51}$$

Os outros valores de q_R são todos nulos, pois o calor que sai de um elemento é o mesmo que entra no elemento adjacente. Introduzindo (2.48) em (2.47) obtém-se

$$\begin{bmatrix}
 12500 & -12500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -12500 & 25000 & -12500 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -12500 & 25000 & -12500 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -12500 & 25000 & -12500 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -12500 & 25000 & -12500 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -12500 & 12500
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_3 \\
 T_4 \\
 T_5 \\
 T_6
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 200000 - 2000T_1 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 250000 - 5000T_6
 \end{Bmatrix}
 \tag{2.52}$$

Rearranjando de modo que o vetor independente não tenha variáveis temperaturas, tem-se

$$\begin{bmatrix}
 14500 & -12500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -12500 & 25000 & -12500 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -12500 & 25000 & -12500 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -12500 & 25000 & -12500 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -12500 & 25000 & -12500 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -12500 & 17500
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_3 \\
 T_4 \\
 T_5 \\
 T_6
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 200000 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 250000
 \end{Bmatrix}
 \tag{2.53}$$

A solução analítica para este problema é dada por

$$T(x) = T_1^\infty - (T_1^\infty - T_2^\infty) \frac{(x/L) + (1/h_1)}{(1/h_1) + (1/h_2) + (L/k)}.
 \tag{2.54}$$

Para a posição dos pontos nodais, a solução analítica (2.54) e a solução numérica do sistema linear (2.53) coincidem, dando os seguintes resultados:

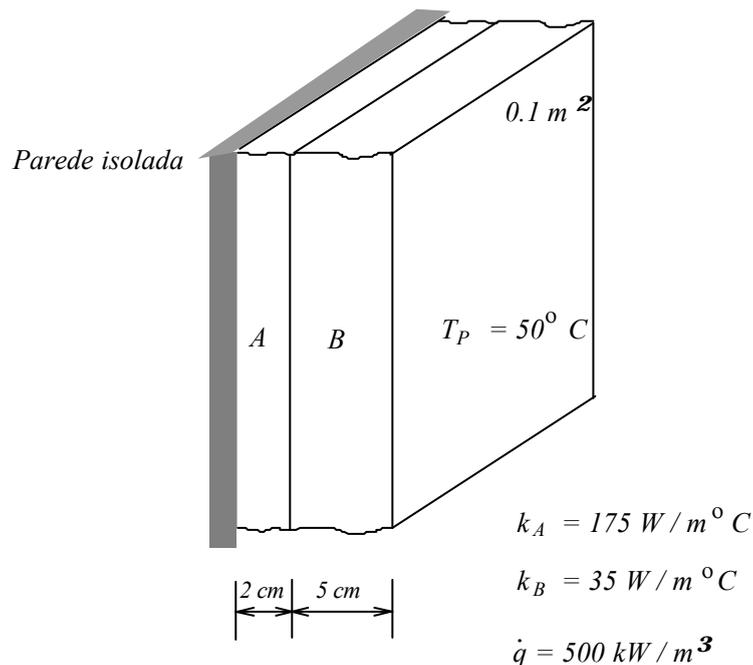
$$\begin{aligned}
 T_1 &= 77.273 \\
 T_2 &= 73.636 \\
 T_3 &= 70.000 \\
 T_4 &= 66.364 \\
 T_5 &= 62.727 \\
 T_6 &= 59.091
 \end{aligned}
 \tag{2.55}$$

Para este problema, a coincidência de resultados não se dá somente na variável primal (T), mas também nas suas derivadas. Esta coincidência entre as soluções era de se esperar, pois como a fonte interna de calor é nula ($Q = 0$), a solução analítica é uma equação linear, e as funções de interpolação utilizadas na aproximação via elementos finitos também são lineares, similar ao caso da barra, quando o carregamento distribuído q_0 é nulo. As derivadas de T em relação a x agora estão associadas ao fluxo de calor

$$(q = -k \frac{dT}{dx}).$$

Exercício

Dado o sólido da figura abaixo, formado por dois materiais, A e B, com geração interna de calor. Calcule as temperaturas no centro dos materiais, e o fluxo total de calor que sai pelo lado direito da parede. Despreze a resistência de contato.



2.8 FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS UTILIZANDO O PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL (generalização do Método de Rayleigh Ritz)

O Método dos Elementos Finitos pode ser definido como a aplicação do método de Rayleigh-Ritz em sub-regiões do domínio, os elementos finitos, onde os coeficientes a determinar são os graus de liberdade (deslocamentos, temperatura, etc).

Na mecânica dos sólidos a energia potencial total p , para um sólido elástico-linear, em notação indicial, é expressa por

$$p = \frac{1}{2} \int_W \mathbf{s}_{ij} \mathbf{e}_{ij} dW - \int_W b_i u_i dW - \int_G t_i u_i dG, \quad (2.56)$$

onde \mathbf{s}_{ij} são as componentes de tensão, \mathbf{e}_{ij} as componentes de deformação, b_i as forças de corpo, t_i as forças de superfície, u_i os deslocamentos, W o domínio de interesse, e G o contorno do domínio de interesse.

Para o problema da barra, tem-se um estado uniaxial de tensões, isto é, apenas a tensão normal ao longo do eixo da barra é diferente de zero. E a expressão da energia potencial total fica

$$p = \frac{1}{2} \int_W \mathbf{s}_x \mathbf{e}_x dW - \int_W b u dW - \int_G t u dG. \quad (2.57)$$

Utilizando a Lei de Hooke

$$\mathbf{s}_x = E \mathbf{e}_x \quad (2.58)$$

tem-se

$$p = \frac{1}{2} \int_W E \mathbf{e}_x^2 dW - \int_W b u dW - \int_G t u dG. \quad (2.59)$$

Mas como $e_x = \frac{du}{dx}$ (elasticidade linear), e q sendo uma força de corpo por unidade de comprimento, então

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{W}} E \left(\frac{du}{dx} \right)^2 d\mathbf{W} - \int_0^L q u dx - \int_{\mathbf{G}} t u d\mathbf{G} . \quad (2.60)$$

A partir da expressão (2.60) aplica-se o Método de Rayleigh-Ritz à um elemento do domínio, onde as variáveis a serem determinadas são os graus de liberdade nodais. Como no método de Rayleigh-Ritz a função aproximada deve satisfazer as condições de contorno cinemáticas, para um elemento esta condição é representada pelo fato de que nos pontos nodais o valor da função aproximada deverá ser igual ao valor do próprio grau de liberdade nodal, de modo a ter-se continuidade entre os elementos. Assim, para um elemento finito de comprimento L e de área A , tem-se

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L q u dx - \int_{\mathbf{G}} t u dx . \quad (2.61)$$

Aproximando-se o deslocamento u através de funções lineares, com dois nós por elemento, como já feito anteriormente na utilização do Método de Galerkin, ou seja

$$\tilde{u}(x) = \left(1 - \frac{x}{L} \right) u_1 + \frac{x}{L} u_2 \quad \text{ou} \quad \tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^2 N_i(x) u_i \quad (2.62)$$

onde as funções de interpolação lineares são dadas por

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{e} \quad N_2 = \frac{x}{L} , \quad (2.63)$$

a derivada da função aproximada $\tilde{u}(x)$ em relação a x fica sendo

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} = -\frac{u_1}{L} + \frac{u_2}{L} . \quad (2.64)$$

A energia potencial total, agora aproximada \mathbf{p}_a , toma a forma

$$\mathbf{p}_a = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{d\tilde{u}}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L q \tilde{u} dx - \int_G t \tilde{u} dx . \quad (2.65)$$

Substituindo (2.64) em (2.65), e verificando que as forças de superfície estão associadas à forças no contorno do elemento, ou seja, forças aplicadas nos nós, tem-se

$$\mathbf{p}_a = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{EA}{L^2} (u_2 - u_1)^2 dx - \int_0^L q(x) \left(\left(1 - \frac{x}{L} \right) u_1 + \frac{x}{L} u_2 \right) dx - P_1 u_1 - P_2 u_2 . \quad (2.66)$$

Em notação matricial (2.66) toma a forma

$$\mathbf{p}_a = \frac{1}{2} [u_1 \quad u_2] \int_0^L \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - [u_1 \quad u_2] - \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} q(x) dx - [u_1 \quad u_2] \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

Aplica-se agora o Princípio da Mínima Energia Potencial (PMEP), que diz:

Dentre todas as equações de deslocamentos que satisfazem a compatibilidade interna e as condições de contorno em um sistema estável, aquelas que também satisfazem as equações de equilíbrio fazem da energia potencial um mínimo.

Em termos matemáticos, o PMEP é expresso por $\mathbf{d}\mathbf{p}_a = 0$, ou $\frac{\delta \mathbf{p}_a}{\delta u_i} = 0$, pois as

incógnitas (coeficientes, no Método de Rayleigh-Ritz) são os graus de liberdade nodais.

Assim

$$\frac{\mathbb{1}P_a}{\mathbb{1}u_1} = \int_0^L \frac{EA}{L^2} dx u_1 - \int_0^L \frac{EA}{L^2} dx u_2 - \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) q dx - P_1 = 0 \quad (2.68)$$

$$\frac{\mathbb{1}P_a}{\mathbb{1}u_2} = - \int_0^L \frac{EA}{L^2} dx u_1 + \int_0^L \frac{EA}{L^2} dx u_2 - \int_0^L \frac{x}{L} q dx - P_2 = 0$$

e a equação de elementos finitos, em forma matricial, fica

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} q dx + \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.69)$$

que é a mesma obtida pelo Método dos Elementos Finitos de Galerkin.

Exercício:

Deduzir a equação de elementos finitos do elemento de barra através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), utilizando funções de interpolação lineares. PTV diz que: *O trabalho virtual realizado pelas forças internas é igual ao trabalho virtual realizado pelas forças externas*, ou seja,

$$\int_{\mathbf{W}} \mathbf{s}_{ij} d\mathbf{e}_{ij} d\mathbf{W} = \int_{\mathbf{W}} b_i d\mathbf{u}_i d\mathbf{W} + \int_{\mathbf{G}} t_i d\mathbf{u}_i d\mathbf{G}.$$

E para a obtenção da equação de elementos finitos necessita-se aproximar tanto os deslocamentos reais u_i como os deslocamentos virtuais $d\mathbf{u}_i$.

2.9 MÉTODO DIRETO

O método direto consiste em obter a equação de elementos finitos à partir dos conceitos de equilíbrio. Para elementos simples este método é uma alternativa em relação à utilização dos métodos energéticos ou resíduos ponderados. Mas para elementos mais complexos sua utilização é praticamente inviável.

Para exemplificar a utilização do método direto, ele será aplicado para a obtenção da equação do elemento finito para análise estrutural mais simples, o elemento de barra.

Analisando-se um elemento finito de barra de comprimento L , com dois nós, atuando sobre eles as forças F_1 e F_2 , conforme esquematiza a figura 2.13, fazendo o equilíbrio de forças, tem-se

$$F_1 + F_2 = 0 \quad \text{ou} \quad F_1 = -F_2 \quad (2.70)$$

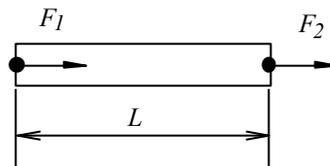


Figura 2.13: Forças atuantes sobre o elemento de barra.

Como o elemento de barra está submetido apenas a um carregamento axial, tem-se somente a tensão normal s_x atuando ao longo da barra, e

$$s_x = \frac{P_x}{A}, \quad (2.71)$$

onde P_x é o esforço normal, e A a área da seção transversal do elemento. Assim, pode-se escrever:

$$F_1 = -s_x A \quad \text{e} \quad F_2 = s_x A. \quad (2.72)$$

Utilizando a lei de Hooke para o estado uniaxial de tensões $\mathbf{s}_x = E\mathbf{e}_x$, tem-se

$$\begin{aligned}F_1 &= -EA\mathbf{e}_x \\F_2 &= EA\mathbf{e}_x .\end{aligned}\tag{2.73}$$

A deformação axial \mathbf{e}_x é dada em função do deslocamento axial $u(x)$ através de sua derivada em relação à coordenada x

$$\mathbf{e}_x = \frac{du(x)}{dx}\tag{2.74}$$

Assumindo que a deformação \mathbf{e}_x é constante ao longo do elemento, pode-se escrever

$$\mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{DL}}{L}\tag{2.75}$$

onde \mathbf{DL} é a variação do comprimento do elemento, e L o comprimento original do elemento. \mathbf{DL} pode ser dado em função dos deslocamentos nodais u_1 e u_2

$$\mathbf{DL} = u_2 - u_1\tag{2.76}$$

e a deformação \mathbf{e}_x toma a forma

$$\mathbf{e}_x = \frac{u_2 - u_1}{L} .\tag{2.77}$$

Substituindo-se (2.77) em (2.73) tem-se

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{-EA}{L}(u_2 - u_1) \\F_2 &= \frac{EA}{L}(u_2 - u_1) .\end{aligned}\tag{2.78}$$

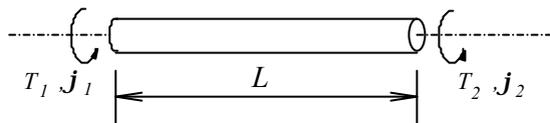
Em notação matricial (2.78) toma a forma:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.79)$$

que é a mesma equação já deduzida anteriormente, através da utilização de outros métodos, para o elemento de barra.

Exercício

Deduza, utilizando o método direto, a equação de elementos finitos de uma barra circular, sujeita apenas à momentos torçores nas extremidades, sendo os graus de liberdade as rotações j_1 e j_2 (ver figura). A matriz de rigidez será em termos de J , G e L , sendo J o momento polar de inércia, e G o módulo de elasticidade transversal.



Viu-se, até o presente momento, três maneiras de se formular um problema através da utilização do Método dos Elementos Finitos, sendo que para todas elas seguiu-se uma metodologia similar. Assim, o Método dos Elementos Finitos pode ser subdividido em seis pontos básicos

1. Especificação do tipo de aproximação: linear, quadrática, etc...
2. Discretização do domínio em elementos finitos: localização dos pontos nodais, especificando as coordenadas, bem como a conectividade.
3. Desenvolvimento do sistema de equações. Utilizando o Método dos Resíduos Ponderados, Princípio da Energia Potencial Estacionária, equilíbrio, ou outro princípio, obtém-se um sistema de equações para cada elemento (obtenção das matrizes de rigidez e vetores de carga para cada elemento). A partir disso, faz-se a adequada superposição das matrizes e vetores, obtendo-se a matriz de rigidez global, e o vetor de cargas global.
4. Imposição das condições de contorno na matriz de rigidez e vetor de carga global.

5. Solução do sistema de equações.
6. Cálculo de outras quantidades de interesse. Essas quantidades estão geralmente relacionadas com as derivadas das incógnitas e são as componentes de tensão, fluxo de calor, velocidade de fluidos, campo elétrico, dependendo do problema que se está resolvendo

2.10 OBTENÇÃO DE FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO UNIDIMENSIONAIS C^0

Neste item será mostrado como, a partir de uma aproximação linear para a função de interesse

$$\tilde{\mathbf{f}} = a_1 + a_2x \quad (2.80)$$

obtem-se as funções de interpolação lineares N_i , podendo-se assim escrever $\tilde{\mathbf{f}}$ em função dos valores nodais

$$\tilde{\mathbf{f}} = \sum_i N_i \mathbf{f}_i \quad (2.81)$$

como feito nas expressões (2.2) para o problema da barra.

No caso de utilizar-se uma aproximação linear na forma da expressão (2.82), o somatório na expressão (2.81) vai de 1 a 2, sendo as funções de interpolação N_1 e N_2 dadas, como já visto anteriormente, por

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{e} \quad N_2 = \frac{x}{L} . \quad (2.82)$$

O método aqui apresentado, apesar de ser aplicado para a obtenção de funções de interpolação lineares, pode ser aplicado a funções de ordem mais alta, e até mesmo à elementos bidimensionais e tridimensionais.

Para as coordenadas nodais, $\tilde{\mathbf{f}}$ deve apresentar os valores nodais, ou seja, para $x = 0$ $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_1$, e para $x = L$ $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_2$. Assim, tem-se

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 \cdot 0 &= \mathbf{f}_1 \\ a_1 + a_2 \cdot L &= \mathbf{f}_2 . \end{aligned} \tag{2.83}$$

Em forma matricial (2.83) pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad [\mathbf{A}]\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{f}\} \tag{2.84}$$

onde

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}; \\ \{\mathbf{a}\} &= \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \\ \{\mathbf{f}\} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Pré multiplicando (2.84) pela inversa da matriz $[\mathbf{A}]$ ($[\mathbf{A}]^{-1}$) obtém-se:

$$[\mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{A}]\{\mathbf{a}\} = [\mathbf{A}]^{-1}\{\mathbf{f}\} \quad \text{ou} \quad \{\mathbf{a}\} = [\mathbf{A}]^{-1}\{\mathbf{f}\} . \tag{2.85}$$

$[\mathbf{A}]^{-1}$ é facilmente obtida, resultando em

$$[\mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix}, \tag{2.86}$$

e os coeficientes a_i são expressos em função dos valores nodais, que a partir de agora são as incógnitas. Assim,

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix}$$

ou

$$a_1 = \mathbf{f}_1 \quad \text{e} \quad a_2 = -\frac{1}{L}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{L}\mathbf{f}_2 \quad (2.87)$$

Substituindo os valores de a_1 e a_2 na expressão (2.80) tem-se

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_1 + \left(-\frac{1}{L}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{L}\mathbf{f}_2 \right) x$$

ou

$$\tilde{\mathbf{f}} = \left(1 - \frac{x}{L} \right) \mathbf{f}_1 + \left(\frac{x}{L} \right) \mathbf{f}_2 . \quad (2.88)$$

Note que (2.88) está escrita na forma da expressão (2.81), onde as funções de interpolação são exatamente aquelas expressas em (2.82).

A representação gráfica das funções de interpolação lineares unidimensionais pode ser visualizada na figura 2.14. Note que N_i é unitária no nó i , e nula no nó j , e vice-versa para a função de interpolação N_j . Para polinômios interpoladores de maior ordem acontece o mesmo, isto é, a função N_i é unitária na posição nodal correspondente ao nó i e nula nos demais nós do elemento. A figura 2.15 representa a interpolação linear da variável $\tilde{\mathbf{f}}$ através de funções de interpolação lineares (equação 2.88).

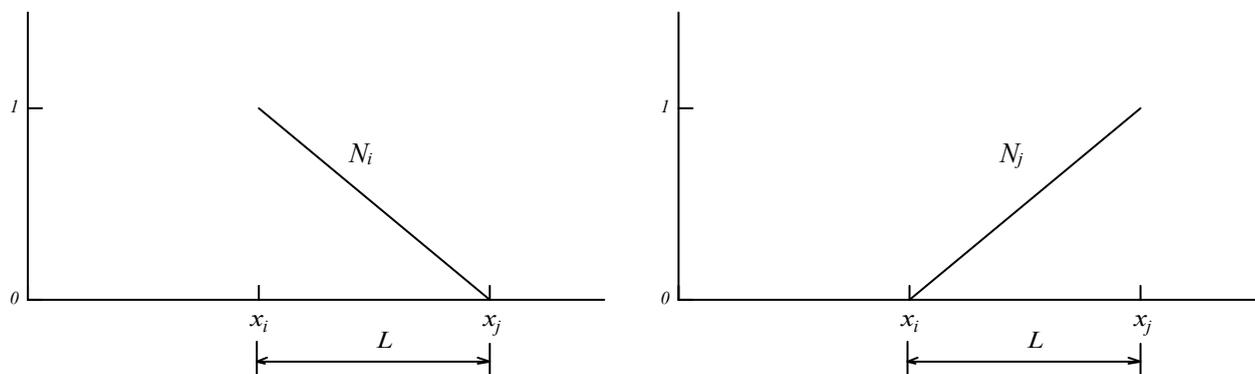


Figura 2.14: Funções de interpolação lineares unidimensionais.

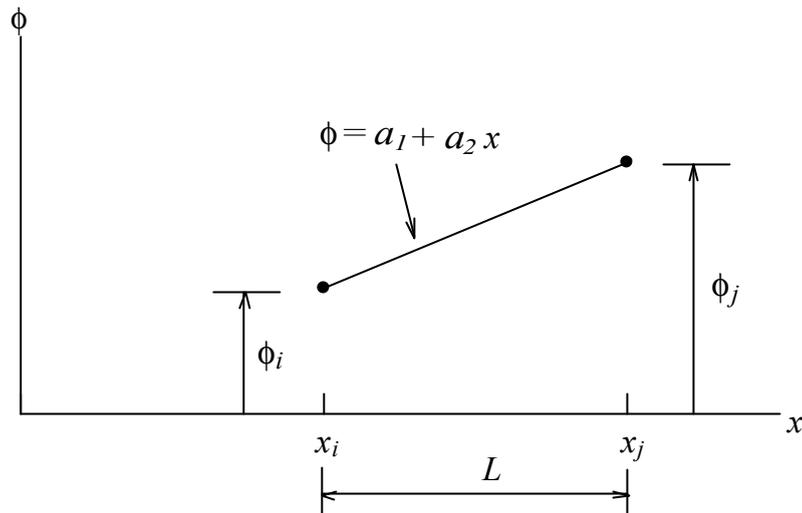


Figura 2.15: Variação linear da variável \mathbf{f} .

Da mesma forma como foram obtidas as funções de interpolação lineares, pode-se obter funções de ordem maior. Por exemplo, para funções de interpolação quadráticas faz-se

$$\tilde{\mathbf{f}} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \quad (2.89)$$

e, para as posições nodais x_1 , x_2 e x_3 (o elemento quadrático possui 3 nós), $\tilde{\mathbf{f}}$ assume os valores nodais, isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}(x_1) &= \mathbf{f}_1 \\ \tilde{\mathbf{f}}(x_2) &= \mathbf{f}_2 \\ \tilde{\mathbf{f}}(x_3) &= \mathbf{f}_3 \end{aligned} \quad (2.90)$$

e, a partir disto, procede-se da mesma forma como feito para as funções de interpolação lineares, obtendo-se os valores dos coeficientes a_1 , a_2 e a_3 em função dos valores nodais \mathbf{f}_1 , \mathbf{f}_2 e \mathbf{f}_3 .

Uma forma geral de obtenção de funções de interpolação polinomiais de continuidade C^0 é através da fórmula de interpolação de Lagrange. Para um elemento de n nós, ou seja, polinômio interpolador de grau $n-1$, a função de interpolação associada ao nó i é dada por

$$N_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right). \quad (2.91)$$

Assim, por exemplo, um elemento quadrático (grau 2) terá 3 nós, e conseqüentemente 3 funções de interpolação, dadas por

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(x_2 - x)(x_3 - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} \\ N_2 &= \frac{(x_1 - x)(x_3 - x)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)} \\ N_3 &= \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Graficamente as funções de interpolação quadráticas podem ser visualizadas na figura 2.16. A figura 2.17 representa a interpolação quadrática da variável \tilde{f} .

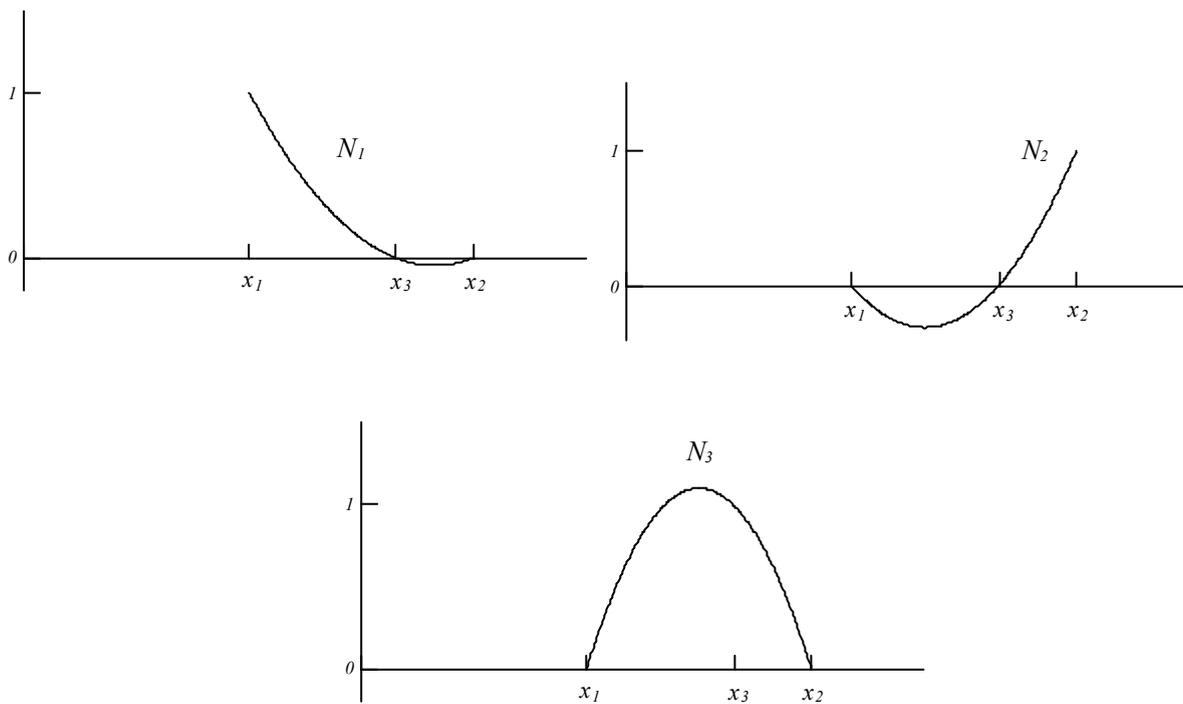


Figura 2.16: Funções de interpolação quadráticas unidimensionais.

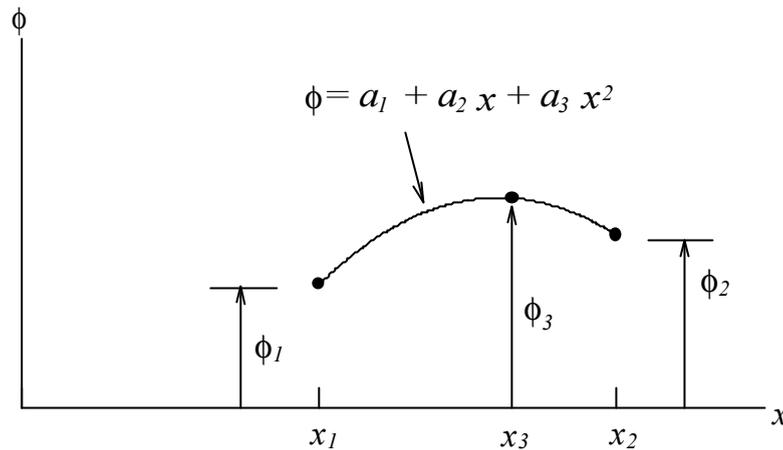


Figura 2.17: Variação quadrática da variável f .

Como a expressão (2.88) é uma expressão geral, as funções lineares também podem ser obtidas a partir dela. Para este caso $n=2$, assim

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad N_2 = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (2.93)$$

Sem perda de generalidade, pode-se fazer $x_1 = 0$ e $x_2 = L$, e assim (2.93) toma a forma da expressão (2.82).

Algumas características podem ser notadas nas funções de interpolação unidimensionais de continuidade C^0 :

1. A função de interpolação N_i é igual a 1 no nó i , e zero nos demais nós do elemento;
2. a soma de todas as funções de interpolação do elemento é igual a 1; (Explique por quê.)
3. a soma das derivadas de todas as funções de interpolação do elemento, em relação a x , é igual a zero (consequência óbvia, a partir de 2).

Exercício

Mostre que a matriz de rigidez para o elemento de barra, utilizando funções de interpolação quadráticas (expressões 2.92), e para os três nós igualmente espaçados, é dada por

$$[K^E] = \frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

2.11 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS PARA O ELEMENTO DE BARRA

Nas deduções da matriz de rigidez e vetor de carga do elemento de barra, ele estava referenciado em relação a um sistema com eixo coordenado (x) alinhado com o seu eixo axial (figura 2.2). No caso de não se ter esta situação, necessita-se fazer uma transformação de coordenadas. Com esta transformação tem-se a possibilidade de modelar treliças planas, pois estas tem a característica de seus membros sofrerem apenas tração ou compressão.

A figura 2.18 apresenta o elemento finito em um sistema cujos eixos coordenados não estão alinhados com seu eixo axial. Na figura 2.18(a) são apresentados os graus de liberdade do elemento. Note que o elemento não alinhado, apesar de possuir um grau de liberdade por nó (\bar{u}_i), com direção coincidente com seu eixo centroidal, possuirá dois graus de liberdade por nó em relação ao sistema de coordenadas global (figura 2.18(b)), provenientes da decomposição daquele grau de liberdade nos eixos globais x e y .

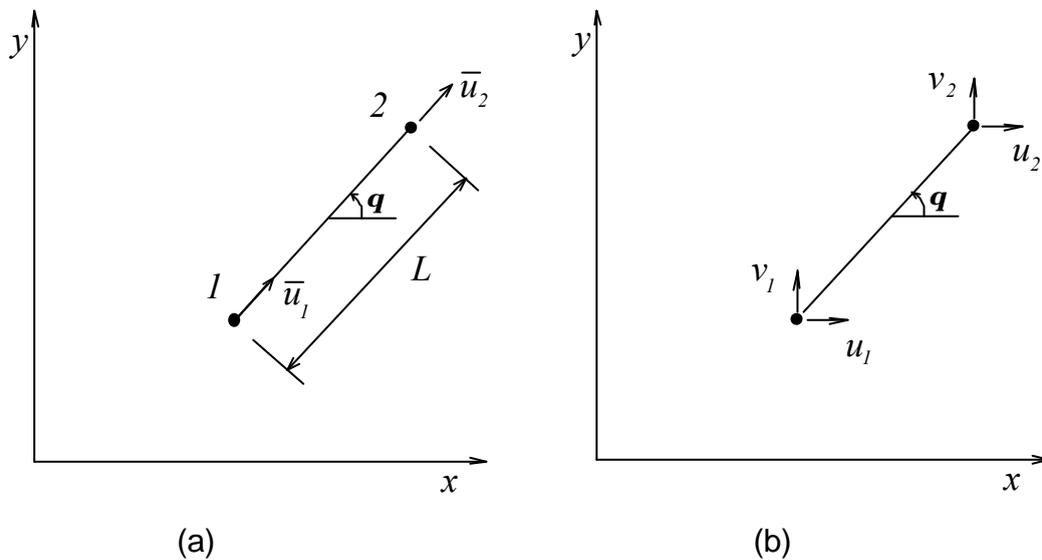


Figura 2.18: Elemento de barra rotacionado em relação ao sistema de coordenadas global x - y .

Sendo \bar{u} o deslocamento ao longo do elemento, u o deslocamento ao longo do eixo x , e v o deslocamento ao longo do eixo y ,

$$\bar{u} = u \cos \mathbf{q} + v \sin \mathbf{q} . \quad (2.94)$$

A partir dessa decomposição, pode-se escrever as relações entre os deslocamentos nodais e suas componentes nas direções x e y , como

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q} & \text{sen } \mathbf{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \mathbf{q} & \text{sen } \mathbf{q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{\bar{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{T}]\{\mathbf{u}\} \quad (2.95)$$

onde

$$\{\bar{\mathbf{u}}\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{é o vetor deslocamentos no sistema local}$$

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad \text{é o vetor deslocamentos no sistema global } x-y$$

e $[\mathbf{T}]$ é a matriz de transformação dada por $[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q} & \text{sen } \mathbf{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \mathbf{q} & \text{sen } \mathbf{q} \end{bmatrix}$.

Uma força \bar{P} ao longo do elemento (mesma direção de $\bar{\mathbf{u}}$) pode ser decomposta em componentes nas direções x e y

$$P_x = \bar{P} \cos \mathbf{q} \quad \text{e} \quad P_y = \bar{P} \text{sen } \mathbf{q} , \quad (2.96)$$

e assim, a relação entre as forças nodais e suas componentes nas direções x e y , atuantes nos dois nós do elemento, é escrita como

$$\begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q} & 0 \\ \text{sen } \mathbf{q} & 0 \\ 0 & \cos \mathbf{q} \\ 0 & \text{sen } \mathbf{q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{\mathbf{P}\} = [\mathbf{T}]^T \{\bar{\mathbf{P}}\} \quad (2.97)$$

onde

$\{\bar{\mathbf{P}}\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{Bmatrix}$ é o vetor carregamento nodal no sistema local

$\{\mathbf{P}\} = \begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \end{Bmatrix}$ é o vetor carregamento no sistema global x - y

e $[\mathbf{T}]^T$ é a transposta da matriz de transformação $[\mathbf{T}]$ dada por $[\mathbf{T}]^T = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q} & 0 \\ \sin \mathbf{q} & 0 \\ 0 & \cos \mathbf{q} \\ 0 & \sin \mathbf{q} \end{bmatrix}$.

Inserindo as relações (2.95) e (2.97) na equação de elementos finitos do elemento de barra, agora expressa em termos de \bar{u}_1 e \bar{u}_2 , ou seja,

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.98)$$

e pré multiplicando por $[\mathbf{T}]^T$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} \cos \mathbf{q} & 0 \\ \sin \mathbf{q} & 0 \\ 0 & \cos \mathbf{q} \\ 0 & \sin \mathbf{q} \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q} & \sin \mathbf{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \mathbf{q} & \sin \mathbf{q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \end{Bmatrix}. \quad (2.99)$$

ou,

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{P}], \quad (2.100)$$

onde $[\mathbf{K}]$ é a matriz de rigidez do elemento de barra, expressa no sistema de coordenadas global x - y , e dada por

$$[K] = [T]^T [\bar{K}] [T] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \mathbf{q} & \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} & -\cos^2 \mathbf{q} & -\cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} \\ & \sin^2 \mathbf{q} & -\sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} & -\sin^2 \mathbf{q} \\ \text{simétrica} & & \cos^2 \mathbf{q} & \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} \\ & & & \sin^2 \mathbf{q} \end{bmatrix}, \quad (2.101)$$

sendo $[\bar{K}]$ a matriz de rigidez do elemento de barra no sistema local.

A equação (2.100) (ou (2.99)) é a equação para o elemento de barra em relação a um sistema de coordenadas x - y , para o caso geral em que seu eixo centroidal está inclinado em relação ao eixo x de um ângulo \mathbf{q} .

A força axial ao longo de cada membro pode ser obtida a partir dos deslocamentos no sistema de coordenadas local (equação (2.98)). Inserindo (2.95) em (2.98) pode-se obter as forças axiais nos membros em função dos deslocamentos nodais no sistema x - y , que foram obtidos diretamente da resolução do sistema linear (2.100):

$$\{\bar{P}\} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [T] \{u\} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q} & \sin \mathbf{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \mathbf{q} & \sin \mathbf{q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (2.102)$$

Desenvolvendo as multiplicações matriciais da expressão (2.100) tem-se

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= \frac{AE}{L} [(u_1 - u_2) \cos \mathbf{q} + (v_1 - v_2) \sin \mathbf{q}] \\ \bar{P}_2 &= \frac{AE}{L} [-(u_1 - u_2) \cos \mathbf{q} - (v_1 - v_2) \sin \mathbf{q}] \end{aligned} \quad (2.103)$$

Note que $\bar{P}_1 = -\bar{P}_2$ e assim, apenas uma das equações (2.103) necessita ser calculada. Geralmente é escolhida a força associada ao nó 2, \bar{P}_2 , pois pode ser interpretado que o membro está sob tração, se for positiva, e sob compressão se for negativa. A partir de \bar{P}_2 pode-se também calcular a tensão normal de cada elemento, apenas dividindo-se \bar{P}_2 pela área correspondente.

$$s = \frac{\bar{P}_2}{A}. \quad (2.104)$$

Para montar a matriz de rigidez necessita-se das propriedades E e A de cada elemento, do comprimento L , e do ângulo \mathbf{q} , sendo que estes dois últimos dados geralmente não são fornecidos diretamente. Pode-se calcular o comprimento L , o cosseno e o seno do ângulo \mathbf{q} para cada elemento a partir de suas coordenadas nodais, ou seja,

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\cos \mathbf{q} = \frac{x_2 - x_1}{L} \quad \text{e} \quad \sin \mathbf{q} = \frac{y_2 - y_1}{L} \quad (2.105)$$

onde (x_1, y_1) são as coordenadas do primeiro nó do elemento, e (x_2, y_2) do segundo nó do elemento.

Exercício

Dada a estrutura apresentada na figura 2.19, calcular o deslocamento no ponto A , as forças axiais, e as tensões normais em cada membro, utilizando o MEF. A área de cada membro está mostrada na figura, e os dois membros são de aço, cujo módulo de elasticidade E é igual a $2.0 \times 10^5 \text{ MPa}$. (Utilizar unidades compatíveis!)

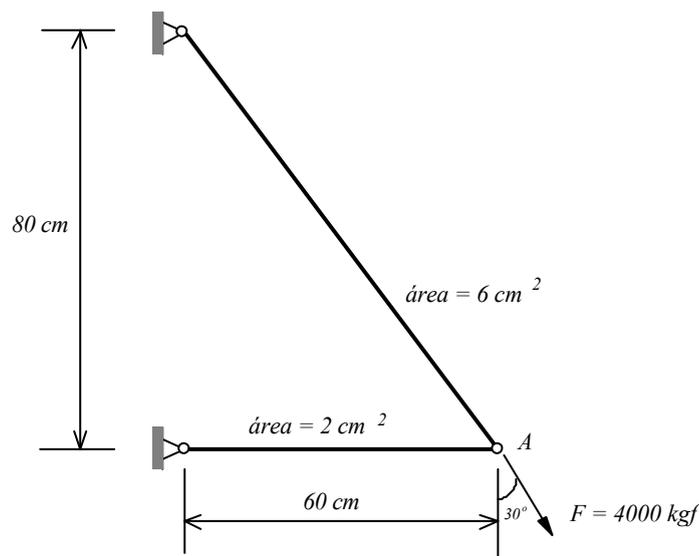


Figura 2.19: Treliça plana a ser resolvida pelo MEF

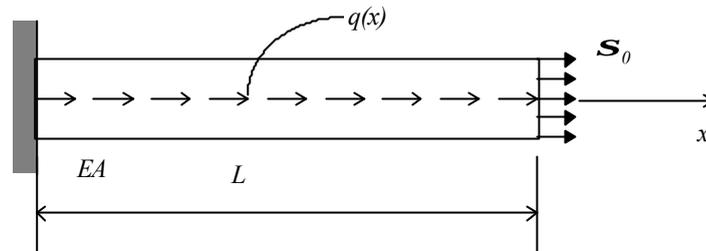
Referências Bibliográficas

1. Bassanezi & Ferreira Jr. (1988).
2. Bathe, K.-J. (1982), "**Finite Element Procedures in Engineering Analysis**", Prentice Hall
3. Buchanan, G. R., (1995), "**Theory and Problems of Finite Element Analysis**", Shawm's Outline Series, McGraw Hill Inc.
4. Carey, G.F. & Oden, J.T. - (1981) - "**Finite Elements**", vol. I, Prentice-Hall, New Jersey.
5. Cook, R.D., Malkus, D.S. & Plesha, M.E. (1988) - "**Concepts and Applications of Finite Element Analysis**", 3rd Edition, John Wiley & Sons, New York.
6. Davis, J.P., e Rabinowitz, P. (1984) - "**Methods of Numerical Integration**", 2nd Edition, Academic Press Inc., Ltd., London.
7. Duarte, C.A.M. & Oden, J.T. (1995) - "**Hp Clouds - A Meshless Method to Solve Boundary-Value Problems**", TICAM Report 95-05.
8. Duarte, C.A.M. (1995) - "**A Review of Some Meshless Methods to Solve Partial Differential Equations**", TICAM Report 95-06.
9. Dym & Shames (1978)
10. Fagan, M.J. (1992) - "**Finite Element Analysis – Theory and Practice**", Logman Scientific and Technical.
11. Hinton, E. & Campbell, J. S. (1974) - "**Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method**", Int. J. Num. Meth. Eng., vol 8, pp. 461-480.
12. Hughes, T.J.R. (1987) - "**The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
13. Pian, T.H.H & Tong, P. (1987) - "**Mixed and Hybrid Finite-Element Methods**", em "Finite Element Handbook", Part 2, "FEM Fundamentals", H. Kardestuncer, Cap. 5, McGraw-Hill Book Company.

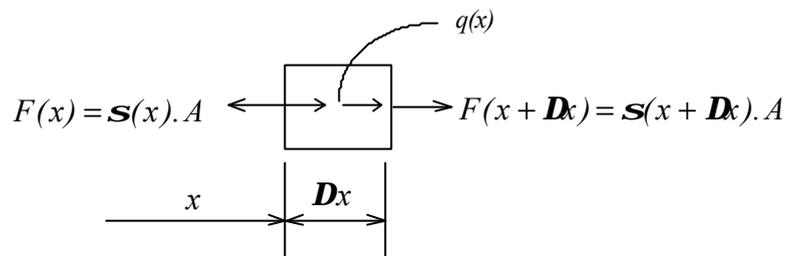
14. Szabó, B. & Babuska, I. (1991) - **“Finite Element Analysis”**, John Wiley & Sons, Co., New York (USA).
15. Tauchert, T. (1974) – **“Energy Principles in Structural Mechanics”**
16. Timoshenko, S.P. & Goodier, J.N. (1980) - **“Teoria da Elasticidade”**, 3a. Ed., Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
17. Zienkiewicz & Zhu (1987) - **“A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis”**, Int. J. Num. Meth. Eng., vol 24, pp. 335-357.

Apêndice A

Dedução da equação diferencial para o problema da barra



Analisando-se um comprimento Dx da barra:



Fazendo o equilíbrio de forças na direção x tem-se

$$\sum F_x = 0 \quad F(x+Dx) - F(x) + qDx = 0$$

Dividindo por Dx :

$$\frac{F(x+Dx) - F(x)}{Dx} + q = 0$$

Fazendo o limite $Dx \rightarrow 0$ tem-se

$$\frac{dF(x)}{dx} + q = 0 \rightarrow \frac{ds(x)A}{dx} + q = 0$$

Utilizando a Lei de Hooke $s = Ee = E \frac{du}{dx}$

$$\rightarrow \frac{d\left(EA \frac{du}{dx}\right)}{dx} + q = 0$$

Se a área A e o módulo de elasticidade E forem constantes, tem-se

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{q}{EA} = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L$$

Condição de contorno em $x=L$:

$$s(x=L) = s_0 \rightarrow E \frac{du}{dx} = s_0 \rightarrow \frac{du}{dx} - \frac{s_0}{E} = 0$$