

Antialiasing Baseado em EWA

Algemiro A. S. Neto e Silvan L. C. Vale

INF 2064 - Visão Computacional e Realidade Aumentada, PUC-Rio

Prof. Marcelo Gattass

Resumo

Neste trabalho apresentamos os fundamentos do filtro de reamostragem Gaussiano EWA (Elliptical Weighted Average) proposto originalmente por Greene e Heckbert em [3]. O objetivo aqui, é a aplicação do EWA na síntese de imagens digitais para redução de artefatos de aliasing. O filtro EWA calcula uma média ponderada sobre uma área elíptica arbitrariamente orientada [3]. O EWA pode ser aplicado como filtro para mapeamento de textura bem como em distorções em imagens.

1. Introdução

Programas de rendering executam usualmente uma transformação perspectiva que simula uma câmera pinhole. Muitas vezes, essas transformações produzem altas frequências nas imagens geradas, dependendo dos objetos e texturas na cena em questão. Quando essas frequências estão acima do limite de Nyquist do grid de amostragem do dispositivo de saída, são produzidos artefatos conhecidos como *aliasing*. Neste trabalho estamos interessados na aplicação de um filtro de reamostragem conhecido na literatura como EWA (Elliptical Weighted Average) para redução de aliasing. Introduzido por Greene e Heckbert (em [3]) o EWA vem sendo utilizado na literatura de diferentes maneiras. Aplicando e extendendo resultados da teoria clássica de processamento de sinais, foi desenvolvido em [2], um algoritmo de rendering, baseado em EWA, eficiente e de alta qualidade para objetos 3D representados por pontos, o EWA Surface Splatting. Diferentes algoritmos utilizando o EWA para este propósito foram propostos como em [19] e [20], entretanto o objetivo deste trabalho é inserir os fundamentos da utilização do EWA na redução de artefatos de aliasing em imagens. Na Seção 2.1, são discutidos alguns tópicos da teoria de processamento de sinais, como amostragem e reconstrução. Na Seção 2.2 são apresentados os tipos de aliasing em computação gráfica e suas causas e na Seção 2.3 são discutidas algumas abordagens antialiasing. Na Seção 2.4 são apresentados conceitos sobre filtros Gaussianos e, na Seção 2.5, é descrito o processo de reamostragem e a aplicação do EWA. Finalmente, as seções 3 e 4 apresentam resultados preliminares e conclusões.

2. Fundamentos

Nesta seção apresentamos algumas definições da teoria de processamento de sinais e análise de Fourier que são essenciais para uma análise dos efeitos da amostragem e entendimento da relação entre um sinal contínuo e sua representação discreta.

2.1 - Processamento de Sinais e Aliasing

A teoria de processamento de sinais é uma ferramenta essencial para lidar com a síntese de imagens digitais. Especificamente, na análise e entendimento de *Aliasing*, que é um problema fundamental em Computação Gráfica. Embora em teoria lidemos, em computação gráfica, com representação contínua de modelos gráficos; na prática, imagens geradas por computador são representadas por um arranjo discreto de amostras.

Síntese de imagens digitais envolve a conversão entre representações contínuas e discretas, o que requer reconstrução e amostragem de sinais multidimensionais. Isto pode causar artefatos de aliasing que aparecem como distúrbios visuais nas imagens geradas. Artefatos de aliasing incluem padrões de Moiré e arestas denteadas ou efeitos de *flick* em animações.

A teoria de processamento de sinais provê um conjunto de ferramentas que caracterizam precisamente a relação entre sinais discretos e contínuo, onde o sinal discreto é um sinal que é representado por valores individuais do sinal em um grid uniforme. As principais operações definidas desta teoria são a conversão de um sinal contínuo em um sinal discreto (i.e sampling), e a reconstrução do sinal contínuo a partir de um sinal discreto. Em particular, com o auxílio da teoria de processamento de sinais nós podemos responder as seguintes questões fundamentais:

- Dado um sinal contínuo e um grid de amostragem uniforme, é possível amostrar o sinal e então reconstruí-lo a partir das amostras, tal que o sinal reconstruído seja idêntico ao sinal contínuo original ? Em outras palavras, existe uma versão amostrada do sinal no grid que seja equivalente ao sinal contínuo ?
- Se este não for o caso: Qual é, de algum modo significativo, a melhor amostragem do sinal no grid, e como podemos obtê-la ?

A chave para responder a estas questões é a conversão dos sinais contínuo e discreto para o domínio das frequências usando a transformada de Fourier.

O estudo de *aliasing* é útil para interpretar imagens, texturas de superfícies ou dados volumétricos como sinais multidimensionais. Na discussão seguinte, vamos focar em sinais unidimensionais simplesmente para facilitar o entendimento, uma vez que os mesmos conceitos se aplicam aos dados multidimensionais. Nós analisamos a amostragem de um sinal contínuo usando a transformada de Fourier e a representação do sinal no domínio das

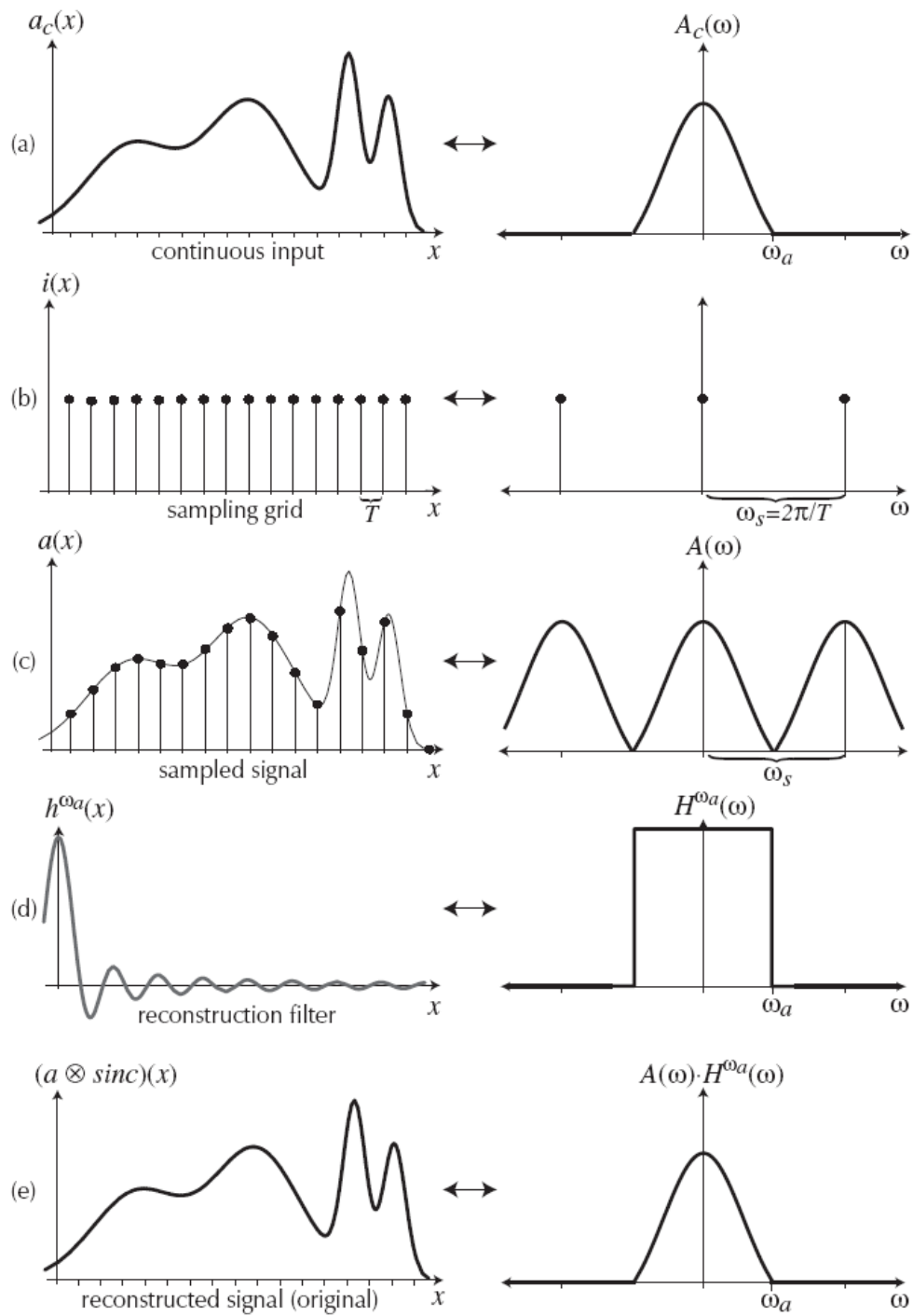


Figura 1. Análise da Frequência do aliasing: Reconstrução livre de aliasing; (a) sinal contínuo de entrada, (b) grid de amostragem, (c) sinal amostrado, (d) filtro de reconstrução, (e) sinal reconstruído. (Figura extraída de [2]).

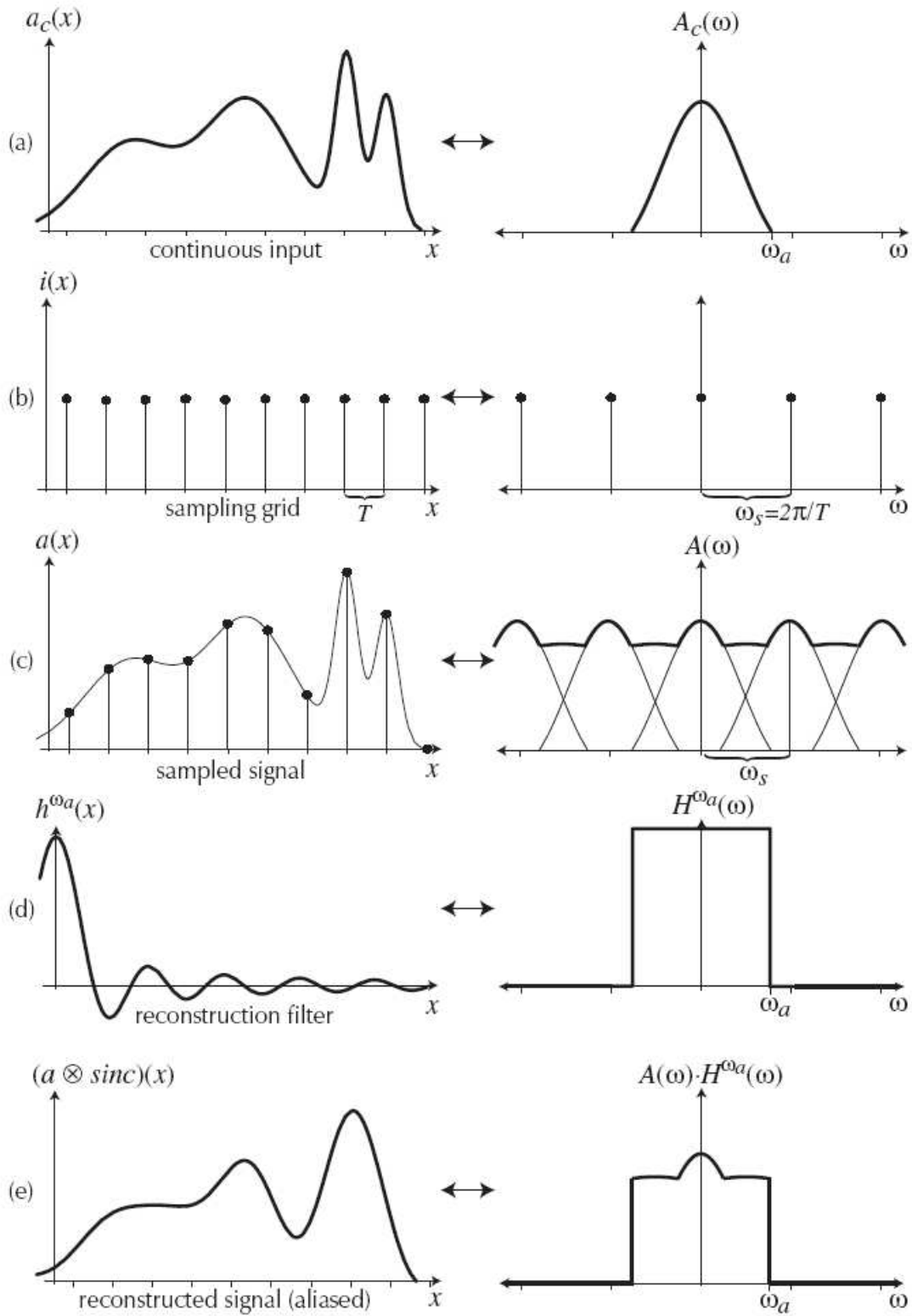


Figura 2. Análise da Frequência do aliasing: ocorrência de aliasing; (a) sinal contínuo de entrada, (b) grid de amostragem, (c) sinal amostrado, (d) filtro de reconstrução, (e) sinal reconstruído. (Figura extraída de [2]).

freqüências, mostradas nas Figuras 1 e 2. A amostragem de um sinal contínuo $a_c(x)$ é executada através de sua multiplicação por uma sequência de impulsos (Figura 2), que é uma soma de impulsos com espaçamento unitário, ou seja,

$$i(x) = \sum_n \delta(x - n). \quad (1)$$

Isto produz um sinal discreto $a(x) = a_c(x)i(x/T)$, onde T é a distância amostral no domínio espacial. No domínio das freqüências isto resulta no espectro do sinal discreto $A(\omega)$ dado pela convolução $A(\omega) = A_c(\omega) \otimes I(\omega)/(2\pi)$, onde $A_c(\omega)$ é o espectro do sinal contínuo $a_c(x)$. A transformada de Fourier da sequência de impulsos $i(x/T)$ é outra sequência de impulsos $I(\omega) = \omega_s i(\omega/\omega_s)$, onde a distância amostral no domínio das freqüências ω_s é inversamente proporcional a distância amostral T no domínio espacial, ou seja, $\omega_s = 2\pi/T$. Uma vez que a multiplicação no domínio espacial corresponde a convolução no domínio das freqüências, o espectro do sinal discreto consiste de uma superposição de réplicas do espectro do sinal contínuo espaçadas a uma distância ω_s (Figura 1(c)).

Para reconstruir o espectro do sinal contínuo, precisamos eliminar todas as réplicas A_c de A exceto a central. Isto é realizado multiplicando $A(\omega)$ por uma função caixa (box) $H^{\omega_a}(\omega) = 1$ se $\omega \leq \omega_a$ e 0 caso contrário, onde ω_a é a freqüência máxima que ocorre em a_c ou A_c . H^{ω_a} é chamado de *filtro passa - baixa ideal* com freqüência de corte ω_a (Figura 1(d), lado direito), uma vez que mantém as freqüências baixas $\omega \leq \omega_a$ inalteradas e suprime completamente as freqüências altas $\omega > \omega_a$. No domínio espacial, a resposta do impulso de H^{ω_a} é uma função sinc:

$$H^{\omega_a}(\omega) \leftrightarrow h^{\omega_a} = 2\omega_a \frac{\sin(2\pi\omega_a x)}{2\pi\omega_a x}. \quad (2)$$

Uma vez que o espectro reconstruído $A(\omega)H^{\omega_a}(\omega)$ na Figura 1(e) é idêntico ao espectro original $A(\omega)$ (Figura 1(a)), a transformada inversa de Fourier reconstrói perfeitamente o sinal original (Figura 1(e), lado esquerdo).

Entretanto, se a freqüência máxima ω_a no espectro de A_c é for maior do que a metade da distância amostral no domínio das freqüências, ou seja, $\omega_a > \omega_s/2$, as réplicas se sobrepõem, conforme na Figura 2(c). Desta forma, é impossível reconstruir o espectro original A_c a partir de A . Quando A é multiplicado pelo filtro passa-baixa (Figura 2(d)), altas freqüências das réplicas aparecem como baixas freqüências no espectro original (Figura 2(e)), o que chamamos de *aliasing*: as altas freqüências no sinal original mascaradas como baixas freqüências no sinal reconstruído (Figura 2(e) lado esquerdo).

Aliasing não ocorre se o sinal contínuo de entrada possui banda limitada a uma largura de banda ω_a , isto é, não possuia frequências acima de ω_a , ou para $|\omega| \geq \omega_a$. Um sinal contínuo com largura de banda ω_a pode ser reconstruído exatamente se a frequência de amostragem ω_s for no mínimo, duas vezes a largura de banda, i.e. $\omega_s > 2\omega_a$. Este fato é conhecido como *Teorema da Amostragem*, e $\omega_s = 2\omega_a$ é chamada de *frequência de Nyquist* do sinal. De modo equivalente, a frequência $\omega_s/2$ é também chamada de *limite de Nyquist* do grid de amostragem. Amostrando um sinal que contenha frequências acima do limite de Nyquist produz aliasing.

2.2 – Aliasing em Computação Gráfica

Imagens digitais são compostas por um mapa de bits que contem a descrição de cada elemento da imagem (*pixel*) individualmente (Imagens raster ou bitmap). Cada pixel armazena todas informações da imagem, tais como cor em um determinado ponto da imagem. De um ponto de vista de processamento de sinais, tais imagens são funções discretas definidas em um grid 2D uniforme. Desta forma, a síntese de imagens digitais é inerentemente um processo de amostragem. O limite de Nyquist do grid 2D é determinado pela distância entre os pontos da amostragem que é equivalente ao tamanho do pixel. De acordo com o teorema da amostragem, uma tentativa de amostrar sinais que contêm frequências acima do limite de Nyquist resulta em Aliasing.

Aliasing aparece em imagens de computador como várias formas de distúrbios visuais. Em [2] os artefatos de aliasing são classificados em quatro categorias: *Texture aliasing*, *edge aliasing*, *illumination aliasing* e *temporal aliasing*.

Texture aliasing refere-se ao aliasing devido as altas frequências em texturas de superfície. O aliasing ocorre se as texturas não têm a banda limitada de forma adequada antes de serem amostradas no grid de pixels da imagem de saída. Isto leva a uma desintegração das texturas, ilustrada na Figura 3, e aos chamados *padrões de Moiré*, mostrados na Figura 4. A Figura 3 mostra um plano com uma textura de alta frequência consistindo de um texto preto sobre um fundo branco. Na Figura 3(a) e 3(b), a maior parte do texto renderizado está ilegível devido ao aliasing. Em contraste, a textura nas Figuras 3(c) e 3(d) teve a banda limitada antes da amostragem para respeitar o limite de Nyquist do grid de pixels. Isto melhorou de forma significativa a legibilidade do texto. Similarmente, a textura de tabuleiro de xadrez na Figura 4(a) não teve a banda limitada ao limite de Nyquist do grid de amostragem. Como uma consequência, aparecem padrões de Moiré que exibem claramente baixas frequências que não estão presentes no sinal de entrada. Limitando a banda da textura antes da amostragem elimina-se estes artefatos, conforme mostra a Figura 4(b).

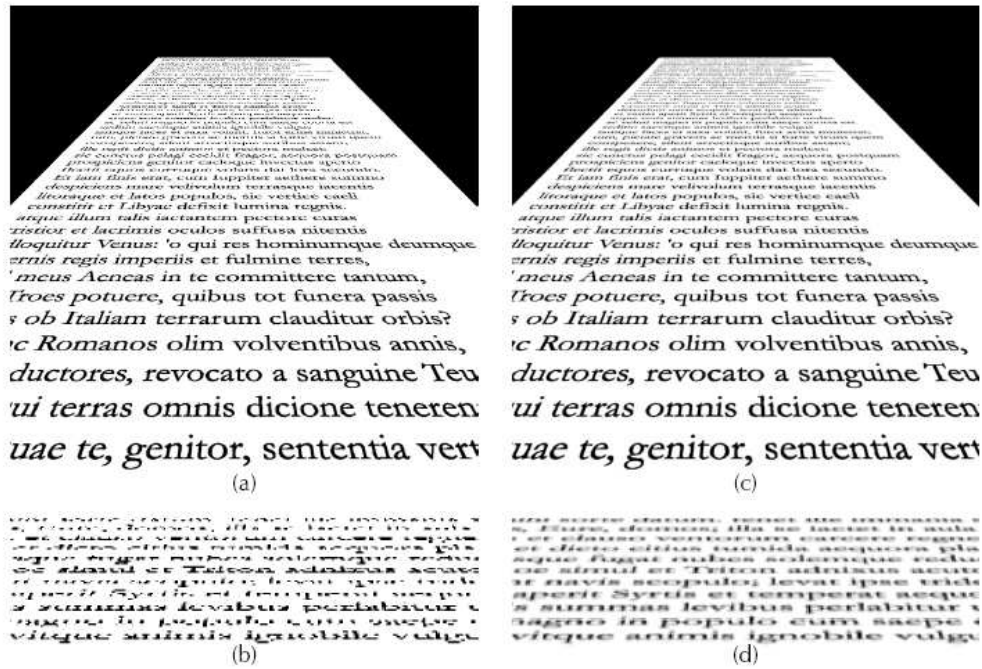


Figura 3. Aliasing leva à desintegração de uma textura de alta frequência: (a) A textura é amostrada abaixo da frequência de Nyquist. (b) Destaque em parte do texto ilegível devido ao aliasing. (c) A textura teve a banda limitada ao limite de Nyquist do grid de pixels antes da amostragem. (d) A maior parte do texto, anteriormente com aliasing, agora é legível.

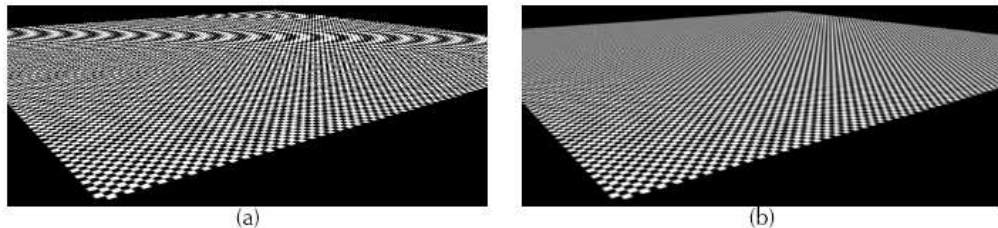


Figura 4. Padrões de Moiré: (a) Amostragem acima da frequência de Nyquist da textura produz baixas frequências na imagem de saída que não estão presentes no sinal de entrada. (b) Limitando a banda da textura para o limite de Nyquist do grid de pixels antes da amostragem evita os padrões de Moiré.

A projeção de cenas tridimensionais em um plano de imagem leva à *arestas de silhueta* na imagem 2D que contêm frequências infinitas em geral. Amostrando as arestas em uma imagem raster sem precauções, causa o chamado *edge-aliasing* ou *jaggies*. Arestas

denteadas (*jagged*) possuem aspecto de escada, o que é facilmente detectado pelo sistema visual humano, conforme ilustrado na Figura 5. Note que a textura de cor neste exemplo, teve a banda limitada, levando a transições suaves de cor na superfície do objeto, ao contrário das transições abruptas entre foreground e background nas bordas da silhueta. Edge Aliasing é ainda mais censurável em animações, onde também é conhecido como “*crawlies*” em referência ao movimento “rastejante” sobre as arestas, provocado pela variação nas imperfeições a cada frame da animação.

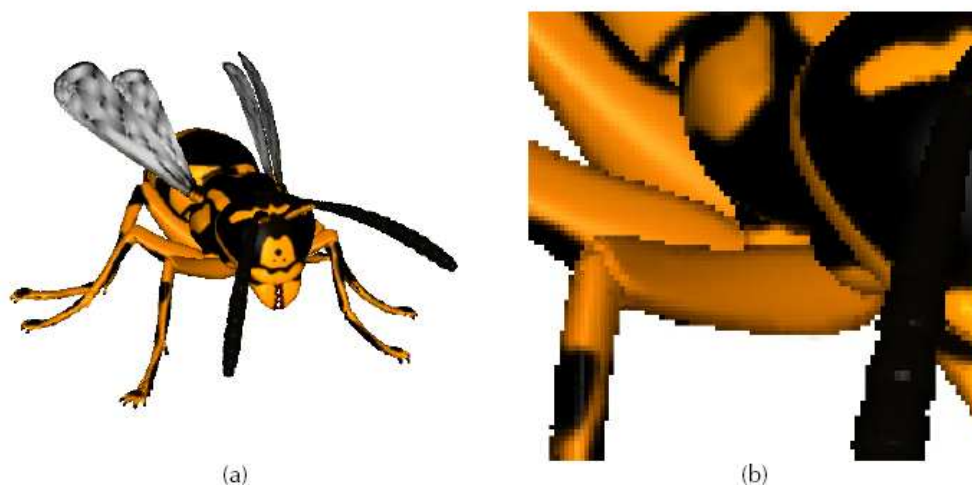


Figura 5. Arestas de silhueta produzem frequências infinitas na imagem de saída, levando à arestas denteadas. (a) Resolução original. (b) Destaque na estrutura de “escada” da silhueta.

A avaliação de um modelo de iluminação é outra origem de altas frequências na geração de imagens por computador. A simulação do movimento da luz em uma cena resulta em efeitos como, sombras, pontos mais luminosos ou reflexões na imagem. Estes efeitos potencialmente contêm frequências infinitas levando a artefatos similares a texture aliasing e edge aliasing que chamamos de *illumination aliasing*.

Além disso, a criação de seqüências de imagens animadas não envolve apenas a amostragem em um grid de pixels bi-dimensional, mas também uma discretização no tempo. Este passo de amostragem adicional é propenso a artefatos de aliasing, os quais são usualmente chamados de *temporal aliasing*. Por exemplo, uma roda de trem girando pode parecer girar vagarosamente para trás devido ao *temporal aliasing*.

2.3 - Antialiasing

Vamos definir um sistema de síntese de imagens digitais como um mecanismo que toma a especificação de um sinal de imagem contínuo 2D $g_c(x)$, $x = (x_0, x_1)^T$, como entrada e o converte em uma imagem discreta $g(x_i)$ definida em posições discretas $\{x_i\}$. A imagem discreta é então exibida em algum dispositivo físico tal como um monitor ou uma impressora. Desta forma, os pontos discretos $\{x_i\}$ usualmente formam um grid regular quadrado. Note que em geral, a função de entrada não está disponível como uma expressão matemática explícita. A avaliação de $g_c(x)$ requer um algoritmo de rendering, como ray tracing ou scanline.

Por esta razão, o sistema de síntese de imagens essencialmente executa um processo de amostragem. A partir da discussão na Seção 2.1 concluímos que existem duas abordagens fundamentais para redução do problema de aliasing: ou eliminamos frequências acima do limite de Nyquist no sinal contínuo antes da amostragem, ou amostramos o sinal a uma frequência mais alta, i.e. aumentando o limite de Nyquist do grid de amostragem. A primeira abordagem é conhecida na literatura como *pré-filtragem*, enquanto a segunda é conhecida como *pos-filtragem*.

2.3.1 – Pré-filtragem (*Prefiltering*)

A Figura 6(a) ilustra a síntese de imagens digitais usando pré-filtragem. O termo pré-filtragem denota o fato de que o sinal de entrada teve a banda limitada, i.e., é filtrado antes da amostragem, o que é um procedimento útil para evitar aliasing. Convolvindo o sinal $g_c(x)$ com um filtro passa - baixa ideal $h(x)$ produz um sinal com banda limitada $g'_c(x) = g_c(x) \otimes h(x)$ que respeita o limite de Nyquist do grid de amostragem. Assim, a imagem amostrada estará livre de artefatos de aliasing. Infelizmente, o sinal de entrada $g_c(x)$ é, em geral, não disponível em uma forma que permite a avaliação desta convolução. Lembrando que a avaliação de $g_c(x)$ em um ponto de x da imagem é equivalente a calcular a cor da imagem em x usando um algoritmo de rendering. Pré-filtragem é frequentemente aplicada em mapeamento de textura [1]. Entretanto, esta técnica não é aplicável para evitar edge aliasing e illumination aliasing.

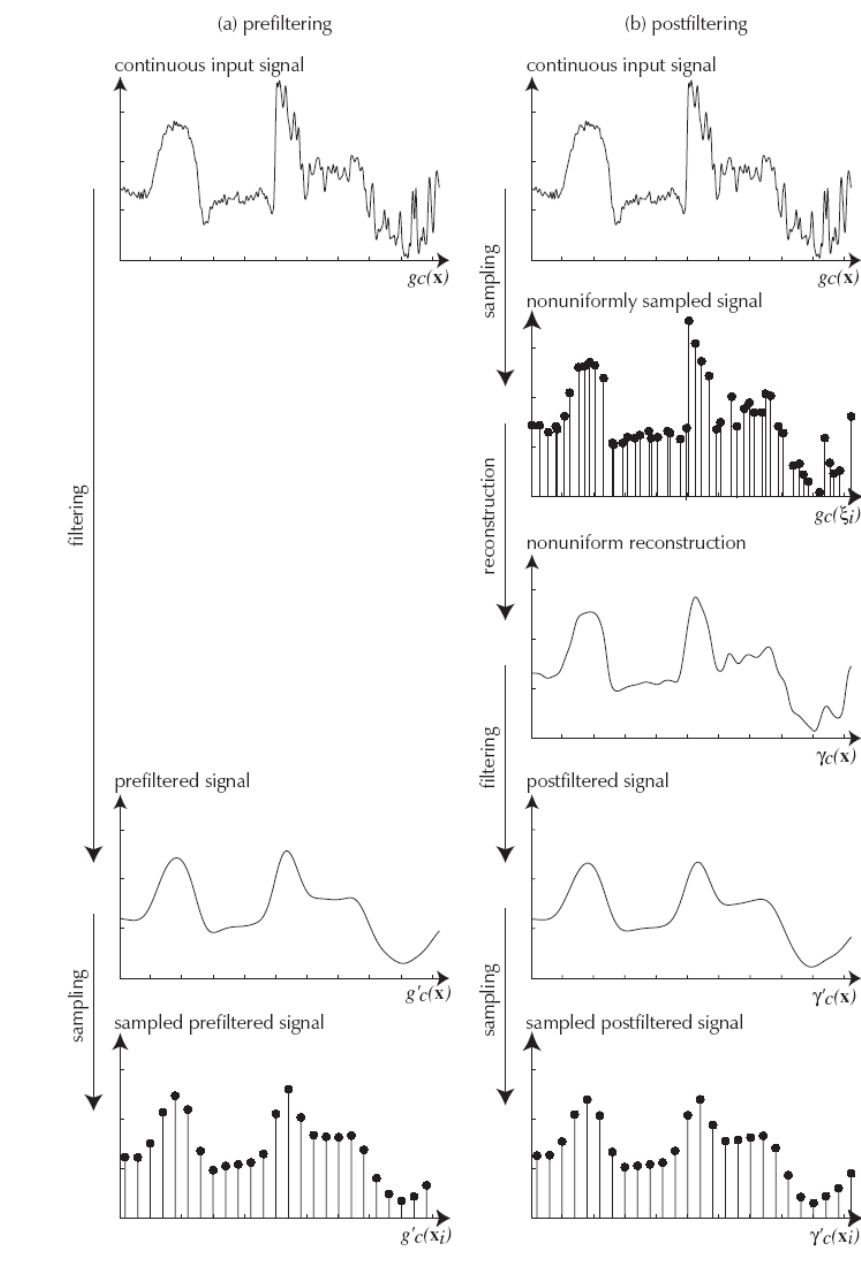


Figura 6. Pipelines de filtragem para síntese de imagens digitais com antialiasing: (a) pré-filtragem, (b) pós-filtragem.

2.3.2 – Pós-Filtragem (*Postfiltering*)

A Figura 6(b) exibe a sequência dos dados em um pipeline de Pós-filtragem, que é a abordagem mais usual para Antialiasing. Conceitualmente, pós-filtragem também começa com uma função contínua de imagem como entrada. Entretanto, pós-filtragem não conta

com uma expressão contínua para $g_c(x)$. Em vez disso, um conjunto intermediário de amostras $\{g_c(\xi_i)\}$ nas posições $\{\xi_i\}$ é obtido primeiro. O objetivo deste passo é usar um grid de amostragem $\{\xi_i\}$ que introduz menos aliasing do que o grid de amostragem $\{x_i\}$ da imagem de saída. Depois, um sinal contínuo $\gamma_c(x)$ é reconstruído deste conjunto de amostras. Finalmente, este sinal intermediário tem a banda limitada ao limite de Nyquist do grid de amostragem de saída, produzindo $\gamma'_c(x)$ antes de $\gamma'_c(x)$ ser discretizado para gerar as amostras de imagem finais nas posições $\{x_i\}$.

A efetividade dos métodos de pós-filtragem dependem essencialmente de uma escolha inteligente das posições amostrais $\{\xi_i\}$. Por outro lado, a complexidade computacional da maioria dos algoritmos de rendering é proporcional ao número de amostras nas imagens, isto é $|\{\xi_i\}|$, que são computadas. Entretanto, utilizando maior número de amostras aumenta-se o limite de Nyquist do grid de amostragem reduzindo aliasing. Muito esforço tem sido dedicado para encontrar configurações de posições amostrais que otimizem o compromisso entre eficiência e qualidade do antialiasing. Na literatura [4], as várias técnicas são classificadas em duas categorias maiores:

- **Amostragem Uniforme** – Uma abordagem direta para diminuição de artefatos de aliasing é a escolha de um grid intermediário, uniforme ou regular $\{\xi_i\}$ que possua um limite de Nyquist maior do que o grid de saída $\{x_i\}$. Suponha que o limite de Nyquist de $\{x_i\}$ seja a e o de $\{\xi_i\}$ seja b , $a < b$. Consequentemente este *Supersampling*, remove aliasing de frequências ω na banda $a < \omega < b$, enquanto aliasing devido às frequências $\omega > b$ persiste.

Amostragem em um grid regular quadrado é simples e computacionalmente eficiente, por esta razão, também é adequado à implementação em Hardware.

- **Amostragem Não-uniforme** – Na discussão apresentada aqui, a respeito de aliasing pode-se perceber que o espectro do grid de amostragem determina as características dos artefatos de aliasing. Picos concentrados de energia no espectro de grids regulares de amostragem replicam estruturas do sinal de entrada em diferentes bandas de frequência, levando a artefatos de estruturados. Yellot [5] propôs dois critérios para grids de amostragem com o objetivo de produzir uma forma de aliasing menos evidente: primeiro, seus espectros não devem conter picos de energia, e segundo, eles devem possuir uma deficiência de energia de baixa-frequência. Esses critérios são conhecidos como *critérios de ruído azul (blue-noise)*; Grids de amostragem blue-noise possuem a capacidade de substituir estruturas com aliasing por ruídos de alta frequência, os quais são menos censuráveis pelo sistema visual humano. Grids de amostragem blue-noise são inerentemente não-uniformes e existe uma variedade de métodos para produção desses grids.

Com base na teoria para análise de processos de impulso estocásticos desenvolvida por Beutler and Leneman [6, 7], *grids de amostragem estocásticos* com características de blue-

noise têm sido introduzidos em computação gráfica. Os padrões de amostragem mais populares são os *jittered grids* e a *distribuição de Poisson* (*Poisson disk distribution*), os quais foram analisados e discutidos por muitos autores [8, 9]. Uma distribuição de disco de Poisson é um padrão uniforme randômico que mantém um critério de distância mínimo. Uma vez que, a geração de distribuições de discos de Poisson exatas é cara computacionalmente, o chamado *dart throwing algorithm* é freqüentemente usado na prática para calcular uma aproximação [9].

Isto mostra que além das propriedades espectrais de um padrão de amostragem a chamada *discrepância* é outra indicação significativa da sua qualidade para aplicações em síntese de imagens [10]. Intuitivamente, a discrepância mede o quão bem as amostras estão distribuídas sobre um domínio. Em particular, foi matematicamente provado que a discrepância é relacionada ao erro na integração numérica [11]. Por esta razão, padrões com baixa discrepância são particularmente interessantes para os Métodos de Monte Carlo em simulações de transporte de luz (i.e. iluminação Global). Além disso, para as distribuições de amostragem estocásticas mencionadas acima, várias seqüências determinísticas de baixa discrepância tais como as seqüências de Hammersley ou Halton têm sido introduzidas em computação gráfica recentemente [11]. Grids de amostragem ainda mais eficientes, tanto em termos de aproximação de erro quanto em características antialiasing têm sido desenvolvidos randomizando padrões determinísticos de baixa dicrepância [12].

Além disso, tem se identificado que para síntese eficiente de imagens de alta qualidade, a taxa de amostragem deve ser adaptada localmente às características da imagem [13]. Isto levou ao desenvolvimento de técnicas de *amostragem adaptativa* que compreendem dois componentes principais: Primeiro, um conjunto de amostras iniciais é analisado usando o critério de refinamento. Se o critério não é satisfeito, a taxa de amostragem é aumentada através da geração de mais amostras usando a estratégia de refinamento. Este procedimento é repetido até que o critério de refinamento seja satisfeito ou um número máximo de iterações seja alcançado. O objetivo do critério de refinamento é estimar a *largura de banda local* da imagem para controlar a taxa de amostragem. Várias métricas tem sido propostas, tais como as métricas baseadas em máxima diferença de intensidade [13] ou contraste [14] em uma pequena vizinhança de amostras, ou estimação estatística da SNR (Razão Sinal Ruído) [8], ou da variância das amostras [15]. Quando novas amostras são introduzidas no passo de refinamento, é importante preservar as propriedades espectrais do conjunto de amostras iniciais. Algoritmos para a construção de conjuntos de pontos hierárquicos com características de blue-noise adequados à amostragem adaptativa foram desenvolvidos em [16] e em [17].

Discussão

Uma vez que muitos sinais de interesse não possuem a banda limitada, amostragem uniforme a uma alta frequência e pós-filtragem amenizam mas não evitam aliasing completamente. Além disso, o aumento da frequência de amostragem leva a um consumo maior de memória e requisitos computacionais da maioria dos algoritmos. Amostragem não-uniforme com padrões de ruído azul podem transformar aliasing estruturado em ruídos de alta frequência, mas tais padrões são usados predominantemente em renderers offline de alta qualidade. Devido a sua irregularidade, não são adequados aos pipelines de renderização interativos acelerados por hardware. Ao contrário, pré-filtragem é executada aplicando-se um filtro passa-baixa ao sinal antes da amostragem, dessa forma, este método é teoricamente mais justificável em aplicações antialiasing. Usando um filtro passa-baixa ideal, o sinal filtrado pode ter a banda limitada para a frequência de Nyquist do grid de amostragem e assim o aliasing é completamente eliminado. Em pipelines de rendering interativos, a pré-filtragem é implementada como uma convolução no domínio espacial; dessa forma pré-filtros com suporte pequeno são desejáveis por razões de eficiência. Infelizmente, o filtro passa-baixa ideal possui suporte infinito no domínio espacial, desta forma não pode ser aplicado em tais sistemas. Uma vez que as larguras de um filtro nos domínios espacial e das frequências são inversamente associadas, algum aliasing será inevitável durante a amostragem. Esta relação é discutida com mais detalhes em [2] seção 2.5.

2.4 - Filtros Gaussianos

Funções Gaussianas executam um papel fundamental em muitas áreas da matemática aplicada, em particular em estatística. Para processamento digital de sinais tais funções são atrativas porque provêm uma única combinação de características espectrais razoáveis e propriedades analíticas. Na seção seguinte, abordamos algumas características das Gaussianas 1D. Gaussianas N-dimensionais são tratadas na Seção 2.4.2.

2.4.1 – Gaussianas 1D

Uma função Gaussiana uni-dimensional é definida como:

$$g_{\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}, \quad (3)$$

onde σ^2 é a variância, e σ o desvio padrão. Nesta forma a Gaussiana é normalizada para possuir integral unitária, i.e.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma^2}(x) dx = 1. \quad (4)$$

A representação desta função no domínio das frequências é dada por

$$g_{\sigma^2}(x) \leftrightarrow G_{\sigma^2}(\omega) = e^{-\sigma^2 \omega^2 / 2} = \sigma \sqrt{2\pi} g_{1/\sigma^2}(\omega), \quad (5)$$

desta forma a transformada de Fourier de uma gaussiana é outra gaussiana.

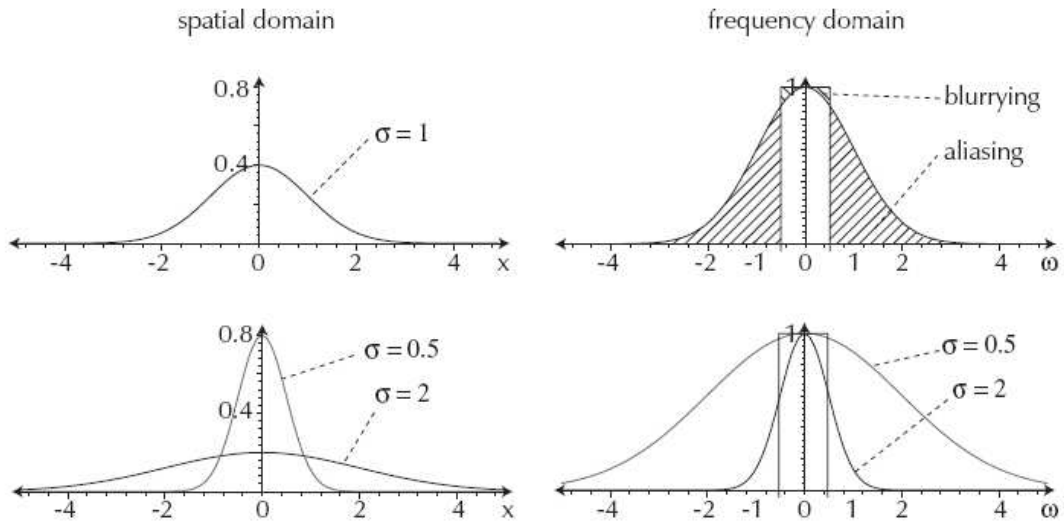


Figura 7. Gaussianas em 1D, as funções são mostradas no domínio espacial à esquerda e suas representações correspondentes no domínio das frequências à direita.

A Figura 7 ilustra a relação de Gaussianas 1D no domínio espacial e das frequências. Um impulso estreito no domínio espacial corresponde a um impulso mais largo no domínio das frequências, e vice versa. Para comparação, a função Box de um filtro passa-baixa ideal no domínio das frequências também é mostrada. Assumindo que o grid de amostragem possui espaçamento unitário, a frequência de corte é em $\omega = 1/2$, dessa forma, limitando a banda do sinal para o limite de Nyquist do grid. Claramente, escolhendo um desvio padrão adequado σ é um trade-off entre aliasing e *blurriness* (“embaçamento”) no sinal de saída, isto é, um trade-off entre uma deficiência de altas frequências na banda passante e a perda de intensidade do sinal na banda de parada. Para aplicações em processamento de imagens valores entre $1.0 < \sigma < 2.0$ são frequentemente apropriados.

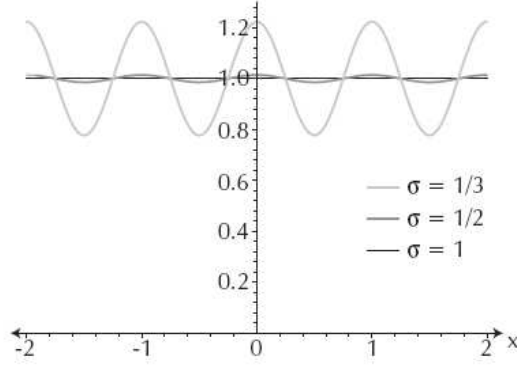


Figura 8. Resposta ao campo plano de Gaussianas 1D com variação no desvio padrão.

A Figura 8 compara a resposta a um campo plano de Gaussianas variando o desvio padrão. A resposta ao campo plano $f_\sigma(x)$ é calculada como o sinal de entrada reconstruído das amostras de valor 1 posicionadas em intervalos unitários, isto é

$$f_\sigma(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{\sigma^2}(x - k). \quad (6)$$

O erro de reconstrução como função do desvio padrão, foi calculado em [2] e é dado por

$$e(\sigma) = \int_{-0.5}^{0.5} (f_\sigma(x) - 1)^2 dx, \quad (7)$$

Para $\sigma = 1$, que é útil em computação gráfica conforme afirmamos acima, a resposta ao campo plano é quase constante. O erro de reconstrução correspondente $e(1) = 1.43e - 17$ é tão pequeno que artefatos visuais não aparecem na prática.

2.4.2 – Gaussianas Multidimensionais

Uma Gaussianas N-dimensional é definida como

$$g_V^N(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |V|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} x^T V^{-1} x}. \quad (8)$$

Aqui, V é a matriz de variância $N \times N$ simétrica, com $|V|$ seu determinante, e x é um vetor coluna $N \times 1$. V é chamado matriz de variância porque executa um papel análogo à

variância escalar σ^2 de uma Gaussiana 1D. Desta forma, a gaussiana N-dimensional é normalizada para a integral unitária,

$$\int_{\mathbb{R}^N} g_V^N(x) dx = 1. \quad (9)$$

A transformada de Fourier $G_V^N(\omega)$ de uma Gaussiana N-dimensional $g_V^N(x)$ é novamente uma Gaussiana N-dimensional. Entretanto, note que a Gaussiana no domínio das frequências não é normalizada para normal unitária:

$$g_V^N(x) \leftrightarrow G_V^N(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^T V \omega} = (2\pi)^{N/2} |V|^{1/2} g_{V^{-1}}^N(\omega). \quad (10)$$

Gaussianas oferecem um número de propriedades analíticas que as tornam atrativas, como filtros para síntese de imagens. Operações tais como, **mapeamento linear, convolução e integração** podem ser avaliadas de forma eficiente em Gaussianas. Um resumo dessas operações pode ser encontrado em [2] Seção 2.6.2.

2.4.3 – Gaussianas Bi-Dimensionais para Processamento de Imagens

Para aplicações em processamento de imagens, o maior interesse é nas Gaussianas 2D:

$$g_V^2(x) = \frac{1}{2\pi |V|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}x^T V^{-1}x}, \quad (11)$$

onde V é uma matriz 2×2 e x é um vetor coluna 2×1 .

Os *isocontours* da Gaussiana 2D g_V^2 são descritos na forma quadrática

$$\frac{1}{2}x^T V^{-1}x - r^2, \quad (12)$$

onde $r \in \mathbb{R}$ é uma constante. A Equação 12 é um polinômio quadrático implícito, representando uma seção cônica. Sem a notação de matrizes a Equação 12 é escrita como:

$$\frac{1}{2}(A'x_0^2 + B'x_0x_1 + C'x_1^2) = r^2, \text{ onde } x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \text{ e } V^{-1} = \begin{bmatrix} A' & B'/2 \\ B'/2 & C' \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Dependendo se $|V|$ é positivo, zero ou negativo, a seção cônica possui a forma de uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole respectivamente. Assim, também chamamos a Gaussiana 2D g_V^2 de Gaussiana elíptica.

Em 2D, os auto-vetores de V determinam o eixo principal da elipse representada pela Equação 12, e os autovalores determinam as variâncias ao longo desse eixo. Em particular, se V é uma matriz de escalonamento uniforme, isto é, $V = \text{diag}(\sigma^2, \sigma^2)$, o polinômio quadrático implícito pode ser escrito como:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma^2} x_0^2 + \frac{1}{\sigma^2} x_1^2 \right) = r^2. \quad (14)$$

Os *isocontours* da Equação 14 são círculos e a Gaussiana 2D correspondente é radialmente simétrica. Cada seção transversal é uma Gaussiana 1D com variância σ^2 . Desta forma, uma escolha prática para processamento de imagens em grids regulares 2D é $V = \text{diag}(\sigma^2, \sigma^2)$, onde $1.0 < \sigma < 2.0$ (ver [2] seção 2.6.1).

A Transformada de Fourier de uma Gaussiana elíptica 2D é, de maneira análoga ao caso 1D, novamente uma Gaussiana 2D elíptica:

$$g_V^2(x) \leftrightarrow G_V^2(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^T V \omega} = 2\pi |V|^{\frac{1}{2}} g_{V^{-1}}^2(\omega). \quad (15)$$

A Figura 10 mostra uma Gaussiana elíptica 2D anisotrópica com matriz de variância

$$V = \begin{bmatrix} 0.504 & 0.318 \\ 0.318 & 0.796 \end{bmatrix} \quad (16)$$

nos domínios espacial (Figura 10(a)) e das frequências (Figura 10(b)). Note que ao longo de cada direção, uma resposta ao impulso estreita no domínio espacial corresponde a uma resposta larga no domínio das frequências.

Como no caso 1D, a Gaussiana elíptica é um filtro IIR (*Infinite Impulse Response*). O truncamento para um suporte finito é então necessário para fins práticos. Usualmente, o truncamento é executado como a seguir:

$$g_V^2(x) = 0 \text{ para } \{x | x^T V^{-1} x > r^2\}. \quad (17)$$

Deste modo, a forma do filtro Gaussiano truncado é uma elipse. Valores de r entre $2.0 < r < 4.0$ levam a bons resultados. A Figura 9 mostra uma comparação de uma operação de reconstrução de imagem com uma Gaussiana 2D radialmente simétrica $\sigma = 1$ e raios de corte $r = 1$ e $r = 3$. Claramente, erros de reconstrução são visíveis na Figura 9(a), enquanto a

imagem da Figura 9(b) é reconstruída suavemente; não aparecem artefatos devido ao truncamento.

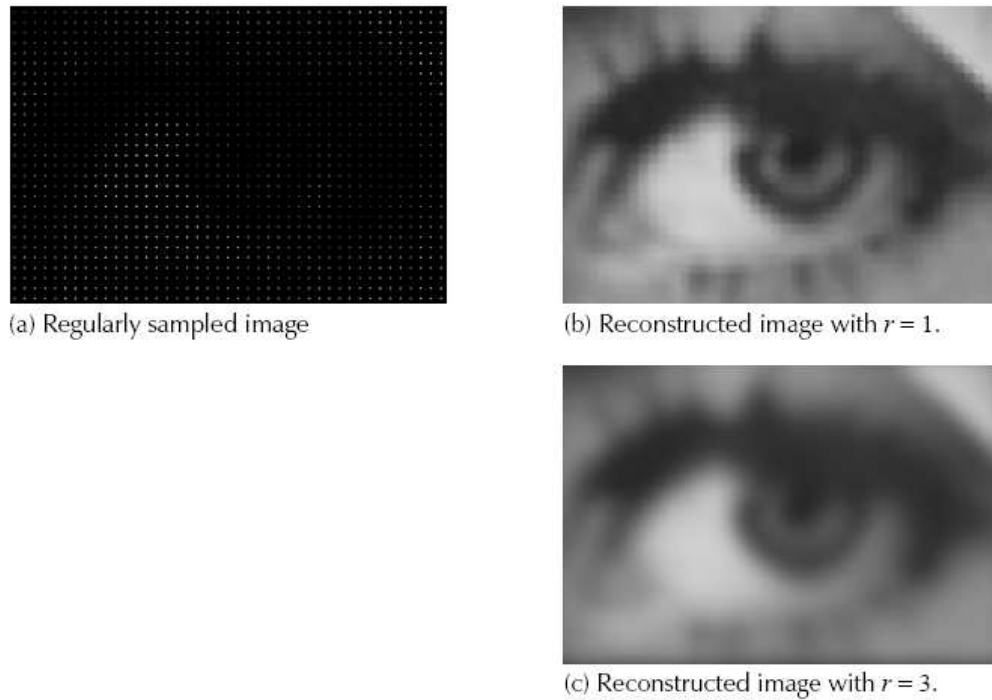


Figura 9. Reconstrução de imagem em um grid de amostragem regular (a) usando Gaussianas radialmente simétricas com $\sigma = 1$ e raios de corte $r = 1$ (b) e $r = 3$ (c).

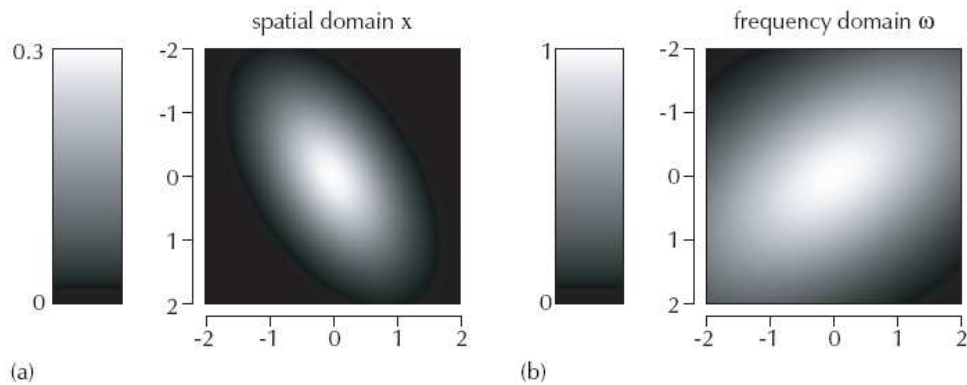


Figura 10. Gaussiana elíptica 2D anisotrópica, (a) no domínio espacial e (b) no domínio das frequências.

2.5 - Filtros de Reamostragem

Na Seção 2.4, foi descrito como uma função de imagem 2D contínua $g_c(x)$ pode ser filtrada para gerar uma imagem discreta sem artefatos de aliasing usando pré ou pós-filtragem. Entretanto deixamos em aberto como calcular a função contínua $g_c(x)$. Por um lado, foi explicado que em geral é impossível obter uma representação explícita de $g_c(x)$. Neste caso, um método de pós-filtragem deve ser empregado. Por outro lado, para determinadas operações restritas, tais como *image warping* e mapeamento de texturas, a função de imagem de saída $g_c(x)$ pode ser produzida explicitamente. Nesta seção será mostrado como combinar uma representação explícita de $g_c(x)$ com um passo de limitação de banda, resultando em um pipeline de pré-filtragem.

Como descrito por Heckbert [1], as tarefas de *image warping* e mapeamento de textura, consistem essencialmente de mapear um sinal 2D (uma imagem) de um domínio de origem para um domínio de destino. O mapeamento é arbitrário, e usualmente envolve distorções geométricas da imagem. Mapeamentos bem conhecidos são afim, bilinear, e projetivo. Uma vez que na prática trabalhamos com imagens discretas, *image warping* envolve o mapeamento de uma função discreta definida nas posições u_k no domínio de origem para o domínio de destino, e amostragem da função deformada nas posições discretas x_k no domínio de destino. É importante perceber que, as posições u_k e x_k não são idênticas em geral, conseqüentemente a imagem tem que ser **reamostrada** neste processo. Nesta seção, vamos apresentar o conceito de filtros de reamostragem. Filtros de reamostragem combinam a reconstrução de um sinal de entrada contínuo, o mapeamento do domínio de origem para o domínio de destino e a pré-filtragem da função contínua de saída $g_c(x)$ antes da amostragem nas posições x_k para evitar artefatos de aliasing.

2.5.1 – Filtros de reamostragem no Domínio de Destino

Conforme ilustrado na Figura 10, reamostragem consiste de quatro passos: reconstrução, warping, pré-filtragem e amostragem [1], [2].

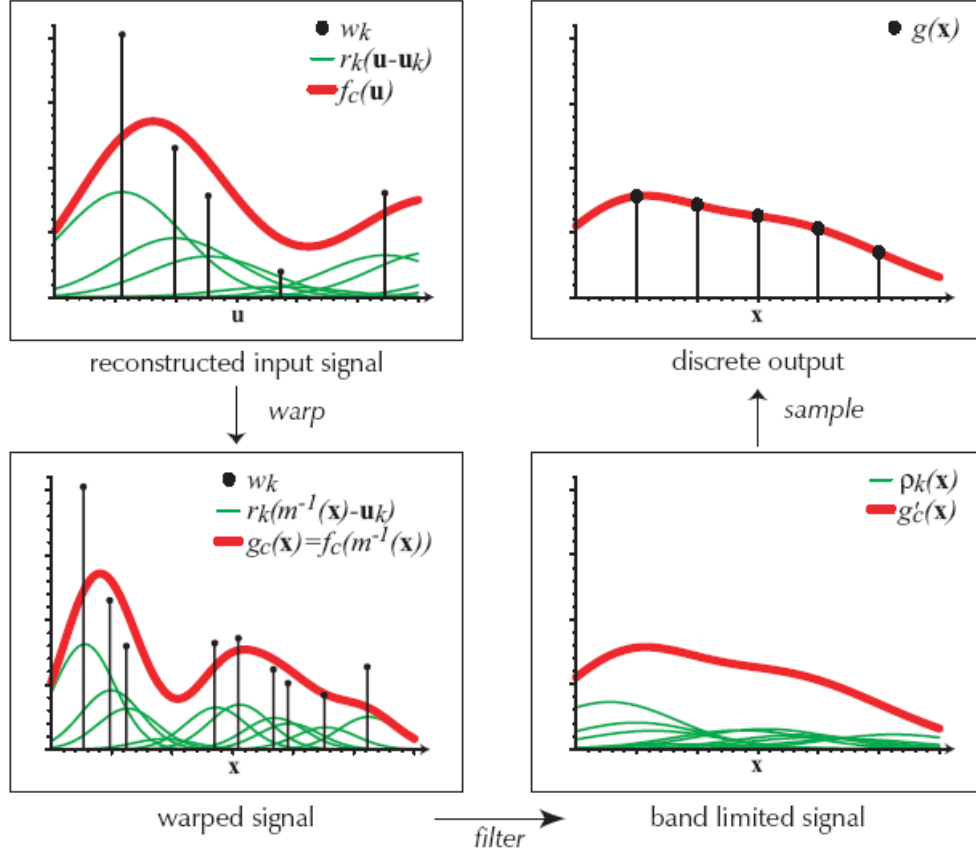


Figura 11. Reamostragem consiste de quatro passos: reconstrução, warping, filtragem e amostragem.

1 – No primeiro passo, reconstruímos um sinal contínuo a partir do sinal de entrada discreto. Dados os valores da função amostrada $f(u_k)$ e filtros de reconstrução no espaço de origem, a função de entrada contínua $f_c(u)$ é

$$f_c(u) = \sum_k f(u_k) r_k(u - u_k), \quad (18)$$

onde u são coordenadas no domínio de origem contínuo. A Equação 18 corresponde a abordagem de filtragem local adaptativa, a qual é descrita em mais detalhes em ([2] seção

3.1.2). Aqui, u_k são posições de amostragem não-uniformes, e os kernels de reconstrução r_k podem ser diferentes para cada amostra.

2 – Denotamos o mapeamento do domínio de origem para o domínio de destino por $x = m(u)$ e $u = m^{-1}(x)$ é seu inverso. Aqui, x denota coordenadas no espaço de destino contínuo. A aplicação deste mapeamento à função de entrada produz a função contínua $g_c(x)$ no domínio de destino.

$$g_c(x) = (f_c \bullet m^{-1})(x) = f_c(m^{-1}(x)). \quad (19)$$

3 – Agora o sinal contínuo deformado (*warped*) é pré-filtrado usando um filtro passa-baixa h , resultando na função contínua de saída $g_c'(x)$:

$$g_c'(x) = g_c(x) \otimes h(x) = \int_{\mathbb{R}^2} g_c(\xi) h(x - \xi) d\xi. \quad (20)$$

4 – Finalmente, o sinal de saída contínuo é amostrado multiplicando-se o sinal por uma sequência de impulsos i para produzir a saída discreta $g(x)$:

$$g(x) = g_c'(x) i(x). \quad (21)$$

Este procedimento sugere uma abordagem de múltiplas passadas, na qual primeiro reconstruímos, então deformamos e convoluímos o sinal de entrada. Entretanto, nós podemos evitar a construção explícita do sinal contínuo reordenando as operações acima. Nós produzimos uma expressão para a função de saída deformada contínua expandindo as operações na ordem inversa:

$$\begin{aligned} g_c'(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} h(x - \xi) \sum_k f(u_k) r_k(m^{-1}(\xi) - u_k) d\xi \\ &= \sum_k f(u_k) \rho_k(x), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{onde} \quad \rho_k(x) = \int h(x - \xi) r_k(m^{-1}(\xi) - u_k) d\xi. \quad (23)$$

Nós chamamos o kernel de reconstrução filtrado e deformado $\rho_k(x)$ de *filtro de reamostragem*, o qual é expresso como uma *integral no espaço de destino*. A Equação 22 mostra que podemos primeiro deformar (warp) e filtrar cada kernel de reconstrução r_k individualmente para construir os filtros de reamostragem ρ_k e então somar as contribuições desses filtros no espaço de destino. Infelizmente, é difícil avaliar a integral na Equação 23 na presença de uma função de mapeamento geral m^{-1} . Para simplificar esta integral, substituímos o mapeamento geral $m(u)$ pela sua aproximação local afim $m_k(u)$ em um ponto u_k ,

$$m_k(u) = x_k + J_k \cdot (u - u_k), \quad (24)$$

onde $x_k = m(u_k)$ e o Jacobiano $J_k = \frac{\partial}{\partial u} m(u_k)$. (25)

No caso de deformação de imagem 2D (*2D image warping*), a Jacobiana J_k é uma matriz 2x2 das derivadas parciais de $m(u)$:

$$\frac{\partial m}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial u_0} & \frac{\partial x_0}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_0} & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \end{bmatrix}, \text{ onde } u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \text{ são vetores coluna.} \quad (26)$$

2.5.2 - Filtro EWA (Elliptical Weighted Average)

Na reamostragem utilizando o filtro EWA substituímos a função $\rho_k(x)$ na Equação 22 pela Gaussiana:

$$\frac{1}{|J_k^{-1}|} \mathcal{G}_{J_k R_k J_k^T + H^{(x - m_k(u_k))}}. \quad (27)$$

Esta equação representa o *filtro de reamostragem Gaussiano no espaço de destino*. Dessa forma, se nós usamos Gaussianas como filtros de reconstrução e passa-baixa, o filtro de reamostragem também é uma Gaussiana. Sua matriz de variância é facilmente calculada como $J_k R_k J_k^T + H$, o que requer apenas duas multiplicações de matrizes e uma adição.

Nas Seções 2.7.2, 2.7.3 e 2.7.4 em [2] é mostrado como a Equação 27 foi produzida e também a formulação de um filtro de reamostragem Gaussiano no espaço de origem além de algumas propriedades desses filtros.

3. Resultados

Uma implementação em C++ do EWA encontra-se em fase de desenvolvimento. No entanto, alguns resultados preliminares foram obtidos com essa implementação em C++ e com uma versão feita em Matlab.

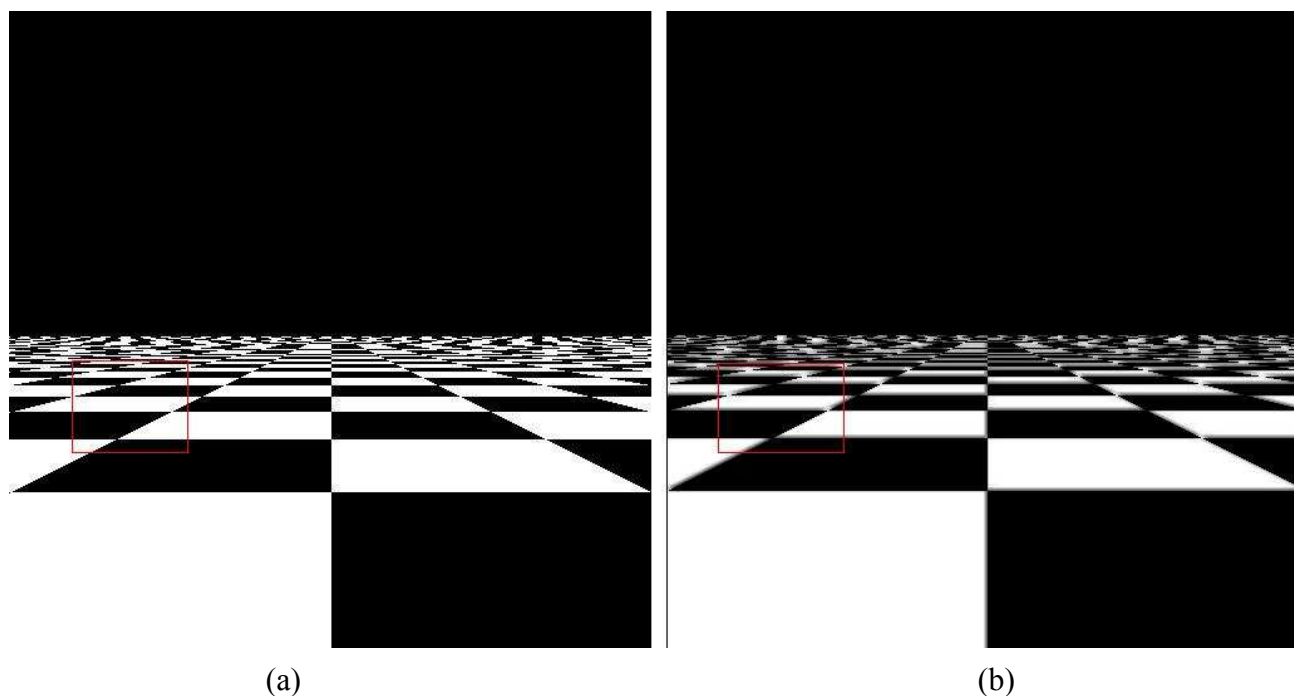


Figura 12. Resultado obtido com a implementação do EWA em Matlab. (a)imagem original (b)Imagem reamostrada com EWA.

Note que na Figura 12(b) houve uma redução dos artefatos de aliasing nas linhas verticais como na região delimitada em vermelho e uma suavização na transição entre preto e branco. No entanto, a reamostragem implementada não parece ter sido efetiva uma vez que no horizonte da imagem não houve redução de aliasing. A implementação em C++ apresentou o mesmo problema! Tal fato se deve, possivelmente, ao cálculo do mapeamento que, por enquanto, está sendo feito separado do código e depois os dados são inseridos manualmente para o EWA. Além do problema em questão, a implementação em C++ apresentou alguns bugs. A Figura 13, ilustra o resultado obtido com esta versão para avaliação do estágio atual do trabalho.

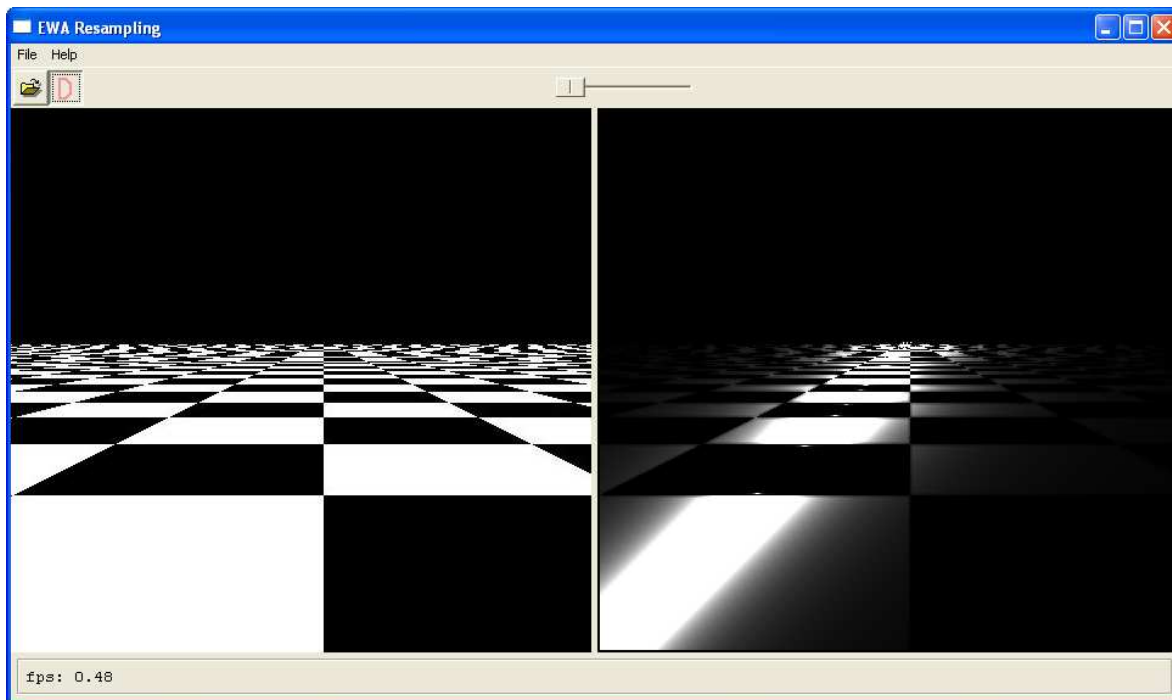


Figura 13. Resultado preliminar obtido com a implementação do EWA em C++. Imagem original à esquerda e à direita imagem reamostrada.

4. Conclusão

Neste trabalho, é apresentada uma introdução à técnica de reamostragem de sinais chamada *Elliptical Wighted Average* (EWA) para redução de aliasing. Devido a problemas na amostragem, sinais que não se adequam à frequência de Nyquist, podem gerar artefatos tanto em imagens bidimensionais quanto em três dimensões. A origem dos dados pode ser uma imagem bidimensional, uma superfície de pontos ou um volume de pontos. Neste trabalho, só tratamos o caso das imagens bidimensionais.

O filtro EWA é uma proposta que utiliza uma gaussiana com uma matriz de variância especial. Em sua forma mais clássica, essa matriz envolve três outras matrizes: uma de variância em torno dos pontos de origem (antes da transformação), outra em torno dos pontos de destino (após a transformação) e uma matriz jacobiana, que utiliza as derivadas parciais das vizinhanças de origem e destino. O resultado final é uma imagem projetada no espaço de tela com menos efeitos de *aliasing*, com bordas suavizadas.

O trabalho implementado ainda não está finalizado. Foi apresentada uma versão preliminar de implementação no Matlab e outra em C++, usando as bibliotecas da IUP e IM. A transformação homográfica ainda deve ser implementada. Até o momento, esses são dados calculados a parte e incluídos diretamente no código do Matlab. Embora os

resultados sejam, dessa maneira, preliminares, pode-se observar o potencial desta técnica como um todo.

5. Referências

- [1] P. S. Heckbert. "Fundamentals of texture mapping and image warping." M.sc. thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley, 1989.
- [2] M. Zwicker, "Continuous Reconstruction, Rendering, and Editing of Point Sampled Surfaces." P.hD. thesis, Swiss Federal Institute of Technology, ETH, Zurich, 2003.
- [3] Ned Greene, Paul S. Heckbert, "Creating Raster Omnimax Images from Multiple Perspective Views Using the Elliptical Weighted Average Filter", IEEE Computer Graphics and Applications, vol. 6, nº 6, June 1986, pp 21-27.
- [4] A. S. Glassner. Principles of digital image synthesis, volume 1. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, 1995.
- [5] J. I. Yellot. "Spectral consequences of photoreceptor sampling in the rhesus retina." Science, 221:382-385, 1983.
- [6] F. J Beutler and O. A. Z. Leneman. "Random sampling of random processes: Stationary point processes." *Information and Control*, 9(4):325-346, Agosto 1966.
- [7] F. J. Beutler and O. A. Z. Leneman. "The spectral analysis of impulse processes." *Information and Control*, 12(3):236-258, March 1968.
- [8] M. A. Z. Dippe and E. H. Wold. "Antialiasing through stochastic sampling." In *Proceedings of SIGGRAPH 85*, pages 60-78. ACM Press, 1985.
- [9] R. L. Cook. "Stochastic sampling in computer graphics." *ACM Transactions on Graphics*, 5(1):51-72, Jan. 1986.
- [10] P. Shirley. "Discrepancy as a quality measure for sample distributions." In *Proceedings of Eurographics*, pages 183-193, 1991.
- [11] S. Heidrich and A. Keller. "Quasi-monte carlo methods in computer graphics, part 1: the qmc-buffer." Technical Report 242/94, Kaiserslautern University, Fachbereich Informatik, 1994.
- [12] T. Kollig and A. Keller. "Efficient multidimensional sampling." *Computer Graphic Forum (EG2002 Proceedings)*, 21(3):557-563, 2002.

- [13] T. Whitted. "An improved illumination model for shaded display." *Communications of the ACM*, 23(6):343-349, 1980.
- [14] D. P. Mitchell. "Generating antialiased images at low sampling densities." In *Proceedings of SIGGRAPH 87*, Pages 65-72. ACM Press, 1987.
- [15] M. E. Lee, R. A. Redner, and S. P. Uelson. "Statistically optimized sampling for distributed ray tracing." In *Proceedings of SIGGRAPH 85*, pages 61-68. ACM Press, 1985.
- [16] M. McCool and E. Fiume. "Hierarchical poisson disk sampling distributions." In *Proceedings of Graphics Interface 92*, pages 94-105, 1992.
- [17] S. Hiller, O. Deussen, and A. Keller. "Tiled blue noise samples." In *Proceedings of VIVION, MODELING, AND VISUALIZATION 2001*, pages 265-271. IOS Press, 2001.
- [18] Jonas Gomes e Luiz Velho, *Image Processing for Computer Graphics*, 1996, Ed. Springer.
- [19] Hanspeter Pfister, Matthias Zwicker, Jeroen van Baar, Markus Gross, "Surfels: Surface Elements as Rendering Primitives", 2000.
- [20] Liu Ren, Hanspeter Pfister, Matthias Zwicker, "Object Space EWA Surface Splatting: A Hardware Accelerated Approach to High Quality Point Rendering.", 2002.